Übungen zur Vorlesung Analysis II SS 07

10. Übungsserie

1.) Die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ sei im Punkt (x_0, y_0, z_0) nach allen 3 Variablen auflösbar, d.h. in einer Umgebung dieses Punktes existieren $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ und $z = z(x,y)$.

a) Unter welchen Bedingungen ist dies möglich?

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} = -1 \ !$$

2.)* Durch $F(x_1, \ldots, x_n,\ y) = 0$ sei in einer Umgebung des Punktes $x_1^0, \ldots, x_n^0,\ y^0$ mit $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$ implizit eine Funktion $y = y(x_1 \ldots x_n)$ gegeben.
Berechnen Sie $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_j x_k}$ in $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$!
Formulieren Sie Bedingungen unter denen dies möglich ist!

3.)* Zeigen Sie, dass das System

$$x^y + z^x + z^y = 3 \ , \quad x \cdot y \cdot z = 1$$

in einer Umgebung des Punktes (1,1,1) durch Funktionen $x = x(z),\ y = y(z)$ aufgelöst werden kann!
Berechnen Sie $x'(1)$ und $y'(1)$!

4.) Es sei

$$\begin{aligned} x &= u + \ln v \\ y &= v - \ln u \qquad u, v > 0 \\ z &= 2u + v \qquad\qquad . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine lokale Auflösung $z = z(x,y)$ im Punkt (1,1) gibt und bestimmen Sie $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ und $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$!

5.) Geben Sie alle Punkte (u,v) und damit auch alle Punkte (x,y,z) an, in deren Umgebung durch $x = u+v,\ \ y = u^2+v^2,\ \ z = u^3+v^3$ die Funktion $z = z(x,y)$ eindeutig bestimmt ist. Berechnen Sie $z_x,\ z_y$!

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 25.06. bis 29.06.2007 abzugeben.