Übungen zur Analysis II
FSU Jena - SS 07
Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

18. Oktober 2008

Aufgabe 01

$$Setzen: \ \xi := x(t), \ \eta := y(t) \ \rightsquigarrow \ F(t,\xi,\eta) := \int_\xi^\eta g(t,\tau)d\tau \equiv f(t)$$

$$\Rightarrow \ f' = \partial_\xi F \cdot \partial_t \xi \cdot \vec{e}_x + \partial_\eta F \cdot \partial_t \eta \cdot \vec{e}_y + \partial_t F = g(t,\eta) \cdot \partial_t \eta - g(t,\xi) \cdot \partial_t \xi + \int_\xi^\eta \partial_t g(t,\tau) d\tau$$

$$= g(t,y(t)) \cdot \dot{y} - g(t,x(t)) \cdot \dot{x} + \int_{x(t)}^{y(t)} \dot{g}(t,\tau)d\tau$$

Aufgabe 02

a)

$$f'(x,y) = (\partial_x f, \partial_y f) = 3(y - x^2, x - y^2) \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \ (x,y) = (0,0) \ \vee \ (x,y) = (1,1)$$

Betrachten:

$$H := f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix} \ \rightsquigarrow \ P_\lambda(H) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 6x & -3 \\ -3 & \lambda + 6y \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6(x+y)\lambda + 36xy - 9 \stackrel{!}{=} 0$$

$$(0,0) \ \rightsquigarrow \ \lambda = \pm 3 \ \rightarrow \ H \ Indefinit \ \rightarrow \ Kein \ Extremum$$

$$(1,1) \ \rightsquigarrow \ \lambda_{1,2} = -3, \ -9 \ \rightarrow \ H \ negativ \ definit \ \rightarrow \ Maximum$$

b)

$$f'(x,y) = \big(6xy-6x, 3x^2+12y^2-24y\big) \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; (x,y) \in \{(0,0),\ (0,2),\ (2,1),\ (-2,1)\}$$

$$H := f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 24y-24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_\lambda(H) = \det\begin{pmatrix} \lambda-6y+6 & -6x \\ -6x & \lambda-24y+24 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$(0,0) \;\rightsquigarrow\; \lambda = -6,\ -24 \;\rightarrow\; H\ negativ\ definit \;\rightarrow\; Maximum$$

$$(0,2) \;\rightsquigarrow\; \lambda = 6,\ 24 \;\rightarrow\; H\ positiv\ definit \;\rightarrow\; Minimum$$

$$(2,1) \;\rightsquigarrow\; \lambda = \pm 12 \;\rightarrow\; H\ indefinit$$

$$(-2,1) \;\rightsquigarrow\; \lambda = \pm 12 \;\rightarrow\; H\ indefinit$$

c)

$$Minimum\ in\ (0,0)$$

d)

$$f'(x,y) = (\cos x - \sin(x+y),\ \cos y - \sin(x+y)) \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; x = y = \frac{\pi}{6}$$

$$H := f''(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix},\ P_\lambda(H) = \det(\lambda E - H) \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow\; \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2} < 0 \;\rightarrow\; negativ\ definit \;\rightarrow\; Maximum$$

e)

$$f'(x,y) = 2e^{-(x^2+y^2)} \cdot \big(x(1-x^2-2y^2), y(2-x^2-2y^2)\big) \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; (x,y) \in \{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$$

$$H := f''(x,y) = \underbrace{2e^{-(x^2+y^2)}}_{>0} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} (2x^4-5x^2+4x^2y^2-2y^2+1) & -2xy(3-x^2-2y^2) \\ -2xy(3-x^2-2y^2) & (4y^4-10y^2+2y^2x^2-x^2+2) \end{pmatrix}}_{A}$$

$$(0,0) \;\rightsquigarrow\; P_\lambda(A) = \det(\lambda E - A) \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1,\ 2 \;\rightarrow\; H\ positiv\ definit \;\rightarrow\; Minimum$$

$$(0,\pm 1) \;\rightsquigarrow\; \lambda_{1,2} = -1,\ -4 < 0 \;\rightarrow\; H\ negativ\ definit \;\rightarrow\; Maximum$$

$$(\pm 1,0) \;\rightsquigarrow\; \lambda_{1,2} = -2,\ 1 \;\rightarrow\; H\ Indefinit$$

Bemerkung: Funktionswerte an Extremstellen einfach durch Einsetzen ausrechnen.

Aufgabe 03

Suchen das Minimum von

$$\vartheta(x,y) := \sum_{i=1}^{3} \left\{ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \right\}$$

Also:

$$\vartheta'(x,y) = \sum_{i=1}^{3} (2(x-x_i),\ 2(y-y_i)) = 6(x,y) - \sum_{i=1}^{3} 2(x_i,y_i) \overset{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ (x,y) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} (x_i,y_i)$$

$$H := \vartheta''(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},\ P_\lambda(H) = \det(\lambda E - H) \overset{!}{=} 0 \ \rightsquigarrow\ \lambda = 6 > 0 \ \rightarrow\ H\ positiv\ definit\ \rightarrow\ Minimum$$

Aufgabe 04

Fall 1: $x_i = 0\ \forall\ i$: Ist $n = 1$ so ist jede durch den Punkt (x_1, y_1) laufende Gerade ein Minimum. Für $n > 1$ ist das Problem sinnlos.
Fall 2: $\exists\ x_i \neq 0$:

$$f'(A,B) = (\partial_A f, \partial_B f) = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i(y_i - (Ax_i + B)),\ y_i - (Ax_i + B)) \overset{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ A \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i^2, x_i) + B \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i, 1) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i, y_i)$$

$$\Rightarrow\ A = \frac{n \sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i) \cdot (\sum_i y_i)}{n \cdot \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},\quad B = \frac{\sum_i y_i}{n} - A \cdot \frac{\sum_i x_i}{n} = \overline{y} - A \cdot \overline{x}$$

$$H := f''(A,B) = 2 \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & n \end{pmatrix} \ \rightsquigarrow\ P_\lambda(H) \overset{!}{=} 0 \ \rightarrow\ \lambda_{1,2} = \frac{\left(n + \sum_i x_i^2\right) \pm \sqrt{\left(n - \sum_i x_i^2\right)^2 + 4 \left(\sum_i x_i\right)^2}}{2}$$

Zu erkennen ist: H ist positiv definit (das heißt es handelt sich um ein Minimum) falls $\lambda_{1,2} > 0$, also $\overline{x^2} > \overline{x}^2$. Dies ist immer erfüllt (vgl. Cauchy Schwarzsche Ungleichung).