Übungen zur Analysis II
FSU Jena - SS 07
Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Juni 2007

Aufgabe 01

Anname: $p \in \mathbb{Z}$. Ein anderer wert würde für $t < 0$ keinen Sinn ergeben: $p \notin \mathbb{Z},\ t < 0 \rightsquigarrow t^p = ?$.

Bezeichnen: $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^n$.

Es gilt ausserdem: $u(0) = u(0 \cdot 0) = 0^p \cdot u(0) = 0$

a) Für $t \neq 0$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t \cdot \vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(tx_1, ..., tx_i + h, ..., tx_n) - f(tx_1, ..., tx_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(tx_1, ..., tx_i + th, ..., tx_n) - f(tx_1, ..., tx_n)}{th}$$

$$= \lim_{h \to 0} t^p \cdot \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{th} = t^{p-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$$

Für $t = 0$ gilt

$$\partial_i f(0 \cdot \vec{r}) = \partial_i f(0) = \lim_{\pi h \to 0} \frac{f(0, ..., \pi h, ..., 0) - f(0)}{\pi h} = \lim_{\pi h \to 0} \frac{\pi^p f(0, ..., h, ..., 0)}{\pi h} = \pi^{p-1} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(0, ..., h, ..., 0)}{h} = \pi^{p-1} \partial_i f(0)$$

also

$$\partial_i f(0 \cdot \vec{r}) = 0 = 0^p \cdot \partial_i f(\vec{r})$$

b) Da $\partial_i u$ (p-1) homogen ist, ist $u' = \vec{\nabla} u = (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)$ auch (p-1) homogen. Nach irgendeinem MWS der Integralrechnung gilt also

$$u(\vec{r}) = u(\vec{r}) - u(0) = \int_0^1 u'(t \cdot \vec{r})\vec{r} \cdot dt = \int_0^1 t^{p-1} u'(\vec{r})\vec{r} dt = u'(\vec{r})\vec{r} \int_0^1 t^{p-1} dt = u'(\vec{r})\vec{r} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow\ u'(\vec{r})\vec{r} = x\partial_x u + y\partial_y u + z\partial_z u = p \cdot u(\vec{r}) \quad \square$$

Aufgabe 02

Eine Näherung (*Taylorpolynom* 1-en bzw. 2-en Grades) einer mehrfach partiell Differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ ist gegeben durch

$$f(h) \approx f(0) + f'(0)h = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0)y,\ h = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

bzw.

$$f(h) \approx f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)(h, h)}{2},\ f''(0)(h, h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)y^2$$

a)

$$f_1(x,y) \approx 1 + (m,n)\cdot(x,y) = 1 + mx + ny$$

b)

$$f_2(x,y) \approx 0 + (0,0)\cdot(x,y) + 1\cdot xy + \frac{0\cdot x^2 + 0\cdot y^2}{2} = xy$$

c)

$$f_3(x,y) \approx 0 + 1\cdot x + 1\cdot y = x + y$$

Aufgabe 03

Es gilt

$$2x\frac{\partial x}{\partial v} = w,\ 2x\frac{\partial x}{\partial w} = v,\ 2y\frac{\partial y}{\partial u} = w,\ 2y\frac{\partial y}{\partial w} = u,\ 2z\frac{\partial z}{\partial u} = v,\ 2z\frac{\partial z}{\partial v} = u$$

demzufolge

$$uF_u + vF_v + zF_z = u\left[\frac{w}{2y}f_y + \frac{v}{2z}f_z\right] + v\left[\frac{w}{2x}f_x + \frac{u}{2z}f_z\right] + w\left[\frac{v}{2x}f_x + \frac{u}{2y}f_y\right] = \frac{vw}{x}f_x + \frac{uw}{y}f_y + \frac{vu}{z}f_z = xf_x + yf_y + zf_z \quad \square$$

Aufgabe 04

Bezeichnen: $f(1) \cong f(1,1,1),\ j = (j_x, j_y, j_z) \in \mathbb{N}_0^3$ und $|j| := j_x + j_y + j_z$.

$$T(f;1) = \sum_{|j|=0}^{\infty} \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^{j_x}\partial y^{j_y}\partial z^{j_z}}(1)\cdot\frac{(x-1)^{j_x}(y-1)^{j_y}(z-1)^{j_z}}{j_x!j_y!j_z!} = f(1) + \partial_x f(1)(x-1) + \partial_y f(1)(y-1) + \partial_z f(1)(z-1)$$

$$+ \partial^2_{xy} f(x-1)(y-1) + \partial^2_{xz}(x-1)(z-1) + \partial^2_{yz}(y-1)(z-1) + \frac{\partial^2_{x^2} f(1)(x-1)^2 + \partial^2_{y^2} f(1)(y-1)^2 + \partial^2_{z^2} f(1)(z-1)^2}{2}$$

$$+ \frac{\partial^3_{x^3} f(1)(x-1)^3 + \partial^3_{y^3} f(1)(y-1)^3 + \partial^3_{z^3} f(1)(z-1)^3}{6} + \partial^3_{xyz} f(1)(x-1)(y-1)(z-1)$$

$$= -3\left\{(x-1)(y-1) + (x-1)(z-1) + (y-1)(z-1)\right\}$$

$$+ 3\left\{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right\} + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1)$$

Bemerkung: Alle restlichen Ableitungen bzw. partiellen Ableitungen sind 0.

Aufgabe 05

Für $n = 2,\ r_0 := (x_0, y_0),\ r = (x,y)$ gilt jeweils

$$T_n(f;r_0)(r) = \sum_{j+i=0}^{2} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(r_0)\frac{(x-x_0)^i(y-y_0)^j}{i!j!}$$

$$= f(r_0) + \partial_x(r_0)(x-x_0) + \partial_y f(r_0)(y-y_0) + \partial^2_{xy} f(r_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2_{x^2} f(r_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2_{y^2} f(r_0)}{2}(y-y_0)^2$$

bzw.

$$T_n(f;r_0)(r) = f(r_0) + \partial_x(r_0)\cdot(x-x_0) + \partial_y f(r_0)\cdot(y-y_0) + \partial_z f(r_0)\cdot(z-z_0)$$

$$+\,\partial^2_{xy} f(r_0)(x-x_0)(y-y_0) + \partial^2_{xz} f(r_0)(x-x_0)(z-z_0) + \partial^2_{yz} f(r_0)(y-y_0)(z-z_0)$$

$$+\,\frac{1}{2}\cdot\left[\partial^2_{x^2} f(r_0)(x-x_0)^2 + \partial^2_{y^2} f(r_0)(y-y_0)^2 + \partial^2_{z^2} f(r_0)(z-z_0)^2\right]$$

a)

$$T_2(f;0) = 0 + 1\cdot x + 1\cdot y - 1\cdot xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

b)

$$T_2(f;(1,1)) = 1 + (x-1) - (y-1) - (x-1)(y-1) + (y-1)^2 = 2x - xy + (y-1)^2$$

c)

$$T_2(f;0) = 1 + mx + ny + nm\cdot xy + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}y^2$$

d)

$$T_2(f;(1,1)) = 1 + (x-1) + 0\cdot(y-1) + (x-1)(y-1) + 0\cdot(x-1)^2 + 0\cdot(y-1)^2 = x + (x-1)(y-1)$$

e)

$$T_2(f;0) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z - xy - xz - yz + 0\cdot x^2 + 0\cdot y^2 + 0\cdot z^2 = -(xy + xz + yz)$$