Übungen zur Vorlesung Analysis II SS 07

7. Übungsserie

1.) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^1$ heißt homogen vom Grad p, wenn

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, \ldots, x_n)$$

a) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen einer differenzierbaren homogenen Funktion vom Grad p ebenfalls homogen sind und den Grad $(p-1)$ besitzen.

b)* Sei $u = f(x, y, z)$ differenzierbar und homogen von Grad p. Dann gilt $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = p \cdot u$.

2.) Geben Sie für die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (1 + x)^m (1 + y)^n \\ f_2(x, y) &= \ln(1 + x) \cdot \ln(1 + y) \\ f_3(x, y) &= \arctan\frac{x + y}{1 + xy} \end{aligned}$$

Näherungsformeln in der Umgebung von $(0, 0)$ an.
Hinweis: entspricht Taylor-Polynom 1. Grades

3.)* Sei $x^2 = vw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv$ und $f(x, y, z) = F(u, v, w)$ differenzierbare Funktionen.
Zeigen Sie, dass

$$xf_x + yf_y + zf_z = uF_u + vF_v + wF_w \ .$$

4.) Es sei $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Entwickeln Sie die Funktion im Punkt $P(1, 1, 1)$ in ein Taylorpolynom!

5.) Geben Sie für die folgende Funktion das Taylor-Polynom n-ten Grades an, mit der Entwicklungsstelle (x_0, y_0) bzw. (x_0, y_0, z_0)

a)	$f(x, y) = \ln(1 + x + y)$,	$n = 2$,	$(x_0, y_0) = (0, 0)$
b)	$f(x, y) = \frac{x}{y}$,	$n = 2$,	$(x_0, y_0) = (1, 1)$
c)	$f(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$,	$n = 2$,	$(x_0, y_0) = (0, 0)$
d)$*$	$f(x, y) = x^y$,	$n = 2$,	$(x_0, y_0) = (1, 1)$
e)	$f(x, y, z) = \cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$,	$n = 2$,	$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 04.06. bis 08.06.2007 abzugeben.