Übungen zur Vorlesung Analysis II SS 07

5. Übungsserie

1.) Es sei f eine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich, die überall eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzen möge. Sowohl f als auch f^{-1} seien differenzierbar.
Stellen Sie eine Beziehung zwischen f' und $(f^{-1})'$ her!
Hinweis: Kettenregel
Bemerkung: In einem späteren Stadium der Vorlesung werden hinreichende Bedingungen für die Existenz und Differenzierbarkeit von f^{-1} angegeben.

2.)* Die Funktion $u(x, y, z)$ sei in Kugelkoordinaten umgerechnet, d.h.

$$U(r, \vartheta, \varphi) = u(r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta) \ .$$

Bestätigen Sie die Formel

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}!$$

3.)* Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Zeigen Sie, dass $\Delta f = 0$ für $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

4.) Es sei $u = u(x, y, z)$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\Delta u = 0$.
Zeigen Sie, dass dann auch $u(x, y, z) = \frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ diese Eigenschaft hat $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

5.) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen, so fern diese existieren

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ in Richtung $\frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $(3, 4)$

b)* $f(x, y) = \sqrt{xy}$ in Richtung $\frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$ in $(2, 2)$

6.) Welche Richtungsableitungen existieren von $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ im Punkt $(0, 0)$?

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 21.05. bis 25.05.2007 abzugeben.