Übungen zur Analysis II
FSU Jena - SS 07
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

3. August 2007

Aufgabe 01

a) Sei $x_0 \in [0,1]$ beliebig. Dann sei $g_{x_0}(x) := 2x^2 x_0 e^{-x^2 x_0^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} g_{x_0}(x) = 2x_0 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2x_0^2}} = 2x_0 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xx_0^2 e^{x^2x_0^2}} = \frac{2x_0}{x_0^2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2x_0^2}} = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[-e^{-n^2x^2}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \left[1 - e^{-n^2}\right] = 1$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$$

c) Aus (b) folgt dass (f_n) nicht gleichmäßig nach 0 konvergiert da sonst die beiden Integrale gleich sein müssten.

d) da $[0,1]$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt) nimmt dort f_n ihr Maximum an. Sei $s_n := \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\}$. Es gilt

$$f_n'(x) = 2n^2 e^{-n^2x^2}(1-2n^2x^2) \ \Rightarrow \ \left(f_n'(x_0) = 0 \ \Leftrightarrow \ x_0 = \frac{1}{n\sqrt{2}}\right)$$

$$f_n''(x) = 4xn^4 e^{-n^2x^2}(2x^2n^2 - 3) \ \Rightarrow \ f_n''(x_0) < 0 \ \Rightarrow \ f_n(x_0) = \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{e}} = s_n$$

$$\Rightarrow \ \|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = s_n \to \infty \ \Rightarrow \ \textit{nicht gleichm. stetig}$$

e) Beispiel:

$$g_n(x) := \frac{n}{x^2+n^2}, \ \|g_n\|_\infty = \sup\{|g_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \Rightarrow \ g_n \to 0$$

$$\textit{Doch}: \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right]_0^\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_0^\infty 0 \cdot dx = \int_0^\infty \left[\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right] dx$$

Aufgabe 02

a) Sei $(f_n) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2) =: \mathcal{L}$ eine nach $A \in \mathcal{L}$ konvergierende Funktion-Folge (nach Normkonvergenz). Dann gilt für beliebige $0 \neq x \in E_1$:

$$\forall\ \varepsilon > 0 : Setzen\ \varepsilon_p := \frac{\varepsilon}{\|x\|_{E_1}} :$$

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_0 : \|f_n(x) - A(x)\|_{E_2} = \|(f_n - A)(x)\|_{E_2} \leq \|f_n - A\| \cdot \|x\|_{E_1} \leq \varepsilon_p \cdot \|x\|_{E_1} = \varepsilon$$

Oberes gilt insbesondere auch für $x = 0$.

b) l_2 ist definiert als

$$l_s := \left\{ (x_i)_1^\infty : x_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty \right\}$$

Sei folgende Norm auf l_2 ekrlärt:

$$\|x\|_l := \sqrt{\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^2}$$

Sei also $x \in l_2$ beliebig, das heißt

$$\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^2 =: \alpha_x < \infty$$

Dann konvergiert $A_n(x)$ punktweise gegen die Einheitsabbildung $Id(x) = x$ denn

$$\|A_n(x) - Id(x)\|_l = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i - \xi_i|^2 + \sum_{i=n+1}^\infty |\xi_i - 0|^2} = \sqrt{\alpha_x - \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} \overset{n\to\infty}{\to} \sqrt{\alpha_x - \alpha_x} = 0$$

doch nicht in der Norm denn

$$\|A_n - Id\| = \sup \{\|A_n(x) - Id(x)\|_l : \|x\|_l \leq 1\} = \sup \{\|(0, ..., 0, -\xi_{n+1}, -\xi_{n+2}, ...)\|_l : \|x\|_l \leq 1\}$$

$$= \sup \left\{ \sqrt{\sum_{i=n+1}^\infty |\xi_i|^2} : \|x\|_l \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \sqrt{\alpha_x - \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} : \|x\|_l \leq 1 \right\} = 1$$

$$denn :\ \forall\ n \in \mathbb{N} : \exists\ (x_m) \in l_2 : \|x\|_l = \sqrt{a_x} = 1\ \wedge\ x_i = 0\ \forall\ i \leq n$$

$$\Rightarrow\ \|A_n - Id\| \overset{n\to\infty}{\to} 1$$

Also nicht konvergent gegen $Id()$ $\square$

Aufgabe 03

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{|0 \cdot h|}{h} = 0,\ Analog :\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$Ansatz :\ f'(0,0) \equiv 0.\ Beweis :\ h := (h_x, h_y),\ \|h\| = |h| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

$$\to \lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(0+h_x, 0+h_y) - f(0,0) - 0}{\|h\|} = \lim_{(h_x,h_y)\to 0} \frac{|h_x h_y|}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \leq \lim_{(h_x,h_y)\to 0} \frac{h_x^2 + h_y^2}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \lim_{(h_x,h_y)\to 0} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} = 0 \quad \square$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\cdot 0}{h^2}-0}{h} = 0,\ Analog:\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Die Funktion ist nicht differenzierbar, denn wäre sie es so müsse $f'(0,0) = grad\ f(0,0) \equiv 0$ doch für die eine beliebige Folge $(x_n, y_n) \to 0, x_n = y_n$ ist

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot 0\cdot \frac{h^2}{h^2}-0}{h} = 0,\ Analog:\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$Ansatz:\ f'(0,0) \equiv 0.\ Beweis:\ \lim_{\|h\|\to 0} \frac{|f(0+h_x,0+h_y)-f(0,0)-0|}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} |h_x h_y| \cdot \frac{\left|h_x^2-h_y^2\right|}{(h_x^2+h_y^2)^{3/2}}$$

$$\leq \lim_{\|h\|\to 0} |h_x h_y| \cdot \frac{h_x^2+h_y^2}{(h_x^2+h_y^2)^{3/2}} = \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_x h_y|}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = 0\ (Siehe\ Aufgabe\ (a))$$

d)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cdot \sin\frac{1}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\cdot \sin\frac{1}{h^2} = 0,\ Analog:\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$Ansatz:\ f'(0,0) \equiv 0.\ Beweis:\ h := (h_x, h_y),\ \|h\| := |h| = \sqrt{h_x^2+h_y^2}$$

$$\to \lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(0+h_x,0+h_y)-f(0,0)-0}{\|h\|} = \lim_{(h_x,h_y)\to 0} \frac{(h_x^2+h_y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{h_x^2+h_y^2}\right)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = \lim_{(h_x,h_y)\to 0} \sqrt{h_x^2+h_y^2}\cdot \sin\left(\frac{1}{h_x^2+h_y^2}\right) = 0 \quad \square$$