Übungen zur Vorlesung Analysis II SS 07

4. Übungsserie

1.*) Es sei $f_n = 2n^2xe^{-n^2x^2}$.

a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1]$.

b) Vergleichen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \quad \text{mit} \quad \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx \ .$$

c) Welche Schlussfolgerungen lassen sich daraus bezüglich der Gleichmäßigkeit der Konvergenz ziehen?

d) Beweisen Sie c) direkt durch Berechnung von $\sup\limits_{0\le x\le 1} f_n(x)$.

e) Zeigen Sie durch ein einfaches Beispiel, dass die gleichmäßige Konvergenz für die Vertauschung mit einem uneigentlichen Integral über $[0,\infty[$ nicht hinreichend ist.

2.) Im Raum der linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen $L(E_1, E_2)$ lässt sich neben dem natürlichen Konvergenzbegriff, der mittels der Operatorennorm beschrieben wird, auch die punktweise Konvergenz einer Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von Abbildungen gegen eine Grenzabbildung A erklären:
$A_n \to A$ (p.w.), falls $A_nx \to Ax$ für alle $x \in E_1$ in der Norm von E_2.

a) Zeigen Sie, dass aus der Normkonvergenz, die punktweise Konvergenz folgt.

b) Sei $E_1 = E_2 = l_2 \qquad x = (\xi_1, \xi_2 \ldots) \in l_2$

$A_nx = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$

Zeigen Sie, dass A_n punktweise, aber nicht in der Norm gegen den Einheitsoperator konvergiert.

3.) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Existenz der partiellen Ableitung und Differenzierbarkeit in $(0,0)$, wenn gegebenenfalls $f(0,0) = 0$ gesetzt wird

a)* $f(x,y) = |x \cdot y|$

b)* $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = x \cdot y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 14.05. bis 18.05.2007 abzugeben.