Übungen zur Analysis II
FSU Jena - SS 07
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

15. Mai 2007

Aufgabe 01

$$f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - xy,\ x > 0,\ \frac{df}{dx} = x^{p-1} - y,\ wobei\ y > 0\ beliebig\ aber\ fest$$

$$f'(x_0) = 0\ \Leftrightarrow\ x_0^{p-1} = y,\ f''(x) = (p-1)x^{p-2} > 0\ \Rightarrow\ f(x_0) : minimum\ (auch\ global)$$

$$f(x_0) = \frac{x_0^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - x_0 y = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{y^{p'}}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} - y^{p'} = y^{p'}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) - y^{p'} = 0$$

$$\Rightarrow\ f(x) \geq 0\ \forall\ x, y > 0\ \Rightarrow\ \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \geq x \cdot y \quad \Box$$

*Trivialerweise gilt obere Gleichung auch für $x = 0$ bzw. $y = 0$

Aufgabe 02

Bemerkung: Im Falle $\forall\ \lambda_i = 0$ bzw. $\forall\ \xi_i = 0$ gelten beide Ungleichungen trivialerweise. Andernfalls gilt:

a)

$$Seien\ \lambda_1 ... \lambda_n,\ \xi_1 ... \xi_n \in \mathbb{R}\ beliebig,\ und\ p, q \in (1, \infty)\ mit\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$Setzen:\ x_i := \frac{|\lambda_i|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \geq 0\ und\ y_i := \frac{|\xi_i|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \geq 0$$

$$Aus\ (1)\ gilt:\ \forall\ i, j \in \{1, ..., n\}\ :\ y_j \cdot x_i \leq \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_j^q}{q}$$

Demzufolge:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i\xi_i|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^p}{p}+\frac{y_i^q}{q}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|\lambda_i|^p}{\left(p\cdot\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p\right)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{|\xi_i|^q}{\left(q\cdot\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^q\right)}$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\ \Rightarrow\ \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i\xi_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\quad\Box$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^p=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^{p-1}\cdot|\lambda_i+\xi_i|\leq\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^{p-1}\cdot|\lambda_i|+\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^{p-1}\cdot|\xi_i|$$

$$\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i+\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\Box$$

Aufgabe 03

$$\|x\|=0\ \Rightarrow\ |x_l|=0\ \forall j\in\{1,...,n\}\ \Rightarrow\ x=0$$

$$\forall\ \alpha\in\mathbb{K}\ :\ \|\alpha\cdot x\|=\|(\alpha x_1,...,\alpha x_n)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|\alpha|^p\cdot\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\cdot\|x\|$$

$$\|x+y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|+\|y\|\ \ \forall\ x,y\quad\Box$$

Aufgabe 04

$$Ansatz:\ \|a\|_*=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ \ eine\ Norm,\ a\in l_p$$

$$Aus\ der\ Definition\ von\ l_p\ folgt:\ \|a\|_*\in\mathbb{R}\ \forall\ a\in l_p$$

Es folgt unmittelbar aus dem Beweis von (3) das $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf l_p ist, indem man einfach n mit ∞ ersetzt. Alle Schritte gelten immer noch da die Reihen konvergent sind. Die Dreiecksungleichung sähe also wie folgt aus:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ a, b \in l_p : \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_* + \|b\|_*$$

$$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow}\ \ \|a+b\|_* \leq \|a\|_* + \|b\|_*$$

Aufgabe 05

$$f : I := [1,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+2}{x+1},\ f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}\ \to\ f\ streng\ monoton\ fallend$$

$$I\ ist\ vollständiger\ normierter\ Raum\ denn\ I \subset \mathbb{R}\ \wedge\ I\ abgeschlossen$$

$$Zeigen:\ f(I) \subset I: \quad 2 > \frac{3}{2} = \frac{1+2}{1+1} \geq f(x) = \frac{x+2}{x+1} \geq \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3} > 1$$

$$Zeigen:\ f\ kontrahierend$$

$$\forall\ x, y \in I : |f(x) - f(y)| = \left|\frac{x+2}{x+1} - \frac{y+2}{y+1}\right| = \left|\frac{y-x}{(x+1)(y+1)}\right| \leq \left|\frac{y-x}{(1+1)(1+1)}\right| = \frac{1}{4}|x-y|$$

$$\to\ |f(x) - f(y)| \leq \alpha \cdot |x-y|,\ \alpha := \frac{1}{4}$$

$$Fixpunkt\ a \in I : f(a) = a\ \Rightarrow\ a = \sqrt{2}$$

Aufgabe 06

$$f : I := [0,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{1+x},\quad f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^{\frac{2}{3}}} > 0$$

$$I\ vollständig\ normierter\ Raum\ denn\ I \subset \mathbb{R}\ \wedge\ I\ abgeschlossen$$

$$Zeigen:\ f(I) \subset I:\quad 0 < 1 = \sqrt[3]{1} \leq \sqrt[3]{1+x} = f(x) \leq \sqrt[3]{3} < 2$$

$$Noch\ zeigen:\ f\ kontrahierend$$

$$f'(0) = \frac{1}{3}\ maximal\ in\ I \Rightarrow\ \forall\ x, y \in I,\ x \neq y\ :\ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{1}{3}\ denn\ sonst:$$

$$MWS\ \Rightarrow\ \exists\ \xi \in (x,y) : f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{1}{3}\ \to\ Widerspruch!$$

$$Ausserdem:\ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0\ da\ f\ streng\ monoton\ wachsend\ \Rightarrow\ \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leq \frac{1}{3}\ \Rightarrow\ |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot |y - x|$$

$$Dies\ gilt\ insbesondere\ auch\ für\ y = x$$

Nach banachschem Fixpunktsatz besitzt f also genau einen Fixpunkt. $\square$