Übungen zur Vorlesung Analysis II SS 07

3. Übungsserie

1.) Sei $1 < p < \infty$ und p' so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Zeigen Sie, dass für $x, y > 0$

$$x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \quad \text{gilt}$$

Hinweis: Extremwertaufgabe für $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^{p'}}{p'} - xy$.

2.) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $\lambda_1 \dots \lambda_n;\ \xi_1 \dots \xi_n$ und $1 < p, p' < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

a) $$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \quad \text{gilt.}$$

Hinweis: Setzen Sie $x = \dfrac{|\lambda_i|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}$ und $y = \dfrac{|\xi_i|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}$ in Aufgabe 1.

b) $$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + \xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Hinweis: Nutzen Sie auf der rechten Seite von

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + \xi_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + \xi_i|^{p-1} |\lambda_i| + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + \xi_i|^{p-1} |\xi_i| \quad \text{die Ergebnisse von 2a)}$$

3.*) Zeigen Sie, dass durch

$$||x||_p = ||(x_1 \dots x_n)||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm für $1 \leq p < \infty$ definiert wird.
Hinweis: Sie dürfen die Ungleichungen der Aufgabe 2 nutzen.

4.) Es sei $l_p = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \ :\ x_i \in I\!R,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i^p| < \infty,\ p \geq 1\}$.
Wie könnte man in l_p eine Norm einführen?
Hinweis: Aufgabe 3

5.) Zeigen Sie, dass $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ eine kontrahierende Abbildung des Intervalls $[1, 2]$ in sich ist und bestimmen Sie den Fixpunkt.

6.*) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ in $[0, 2]$ genau einen Fixpunkt hat.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 07.05. bis 11.05.2007 abzugeben.