Klausur zur Analysis II
FSU Jena - WS 07
- Lösungen -

Stilianos Louca

12. September 2007

Aufgabe 01

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, d.h $F' = f$. Dann gilt:

$$\forall\ a, b \in I : \int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$$

Aufgabe 02

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h

$$\exists\ 0 \le \alpha < 1 : \forall\ x, y \in X : d(f(x), f(y)) \le \alpha \cdot d(x, y)$$

Dann gilt:

- f besitzt in X genau einen Fixpunkt $a = f(a)$.
- Für beliebiges $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n) \subset X : x_{n+1} = f(x_n)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = f(a)$$

Aufgabe 03

Seien $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in D$ beliebig. Auf $\mathbb{R}^2$ wird folgende Metrik definiert:

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) := \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Für die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gilt ferner

$$d(f(\vec{r}_1), f(\vec{r}_2)) = |\sin(x_1 - y_1) - \sin(x_2 - y_2)| + |0 - 0| = 2 \left| \sin\left(\frac{x_1 - x_2 + y_2 - y_1}{2}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)}_{\le \frac{1}{\sqrt{2}}} \right|$$

$$\le \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{|x_1 - x_2 + y_2 - y_1|}{2}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |x_1 - x_2 + y_2 - y_1| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot d(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Die gegebene Abbildung ist demzufolge eine Kontraktion auf D. $\square$

Aufgabe 04

a)

$$f(\vec{r}) = z\sin\left(\pi(x+y)e^{x+y^2+z^3}\right) \;\to\; f' = \begin{pmatrix} \pi z\cos\left(\pi(x+y)e^{x+y^2+z^3}\right)\cdot\left(e^{x+y^2+z^3}+(x+y)e^{x+y^2+z^3}\right) \\ \pi z\cos\left(\pi(x+y)e^{x+y^2+z^3}\right)\cdot\left(e^{x+y^2+z^3}+2y(x+y)e^{x+y^2+z^3}\right) \\ \sin\left(\pi(x+y)e^{x+y^2+z^3}\right)+\pi z\cos\left(\pi(x+y)e^{x+y^2+z^3}\right)\cdot 3z^2(x+y)e^{x+y^2+z^3} \end{pmatrix}$$

$$f'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 3\pi e^3\cos\left(2\pi e^3\right) \\ 5\pi e^3\cos\left(2\pi e^3\right) \\ 6\pi e^3\cos\left(2\pi e^3\right)+\sin\left(2\pi e^3\right) \end{pmatrix}$$

$$\to\; \frac{\partial f}{\partial h} = f'\cdot h = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot f'\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(4\pi e^3\cos\left(2\pi e^3\right)+\sin\left(2\pi e^3\right)\right)$$

b)

$$f(\vec{r}) = z\sin\left(\pi(x+y)\right)\cdot e^{x+y^2+z^3} \;\to\; \frac{\partial f}{\partial h} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{r}+th)-f(\vec{r})}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sin\overbrace{\left(\pi\left[x-\frac{1}{\sqrt{3}}+y+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right)}^{2\pi}\cdot e^{x-\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(y+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(z-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} - z\sin\overbrace{\left(\pi(x+y)\right)}^{2\pi}\cdot e^{x+y^2+z^3}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

Aufgabe 05

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right),\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{1}{9}\cdot\cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right),\; \frac{\partial^3 f}{\partial x_i x_j x_k} = \frac{1}{27}\cdot\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

$$\left(T_2^{\vec{\pi}}f\right)(h) = f(\vec{\pi})+\frac{\partial f}{\partial x}h_x+\frac{\partial f}{\partial y}h_y+\frac{\partial f}{\partial z}h_z+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_x^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_y^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_z^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_xh_y+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_xh_z+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_yh_z$$

$$= -1+\frac{\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2+2h_xh_y+2h_xh_z+2h_yh_z\right)}{18} = -1+\frac{(h_x+h_y+h_z)^2}{18}$$

Die Differenz $\Delta := \left|\left(\mathcal{R}_2^{\vec{\pi}}f\right)(h)\right|$ ergibt sich für ein $\vartheta\in(0,1)$ als

$$\Delta := |\mathcal{R}| = \left|\frac{1}{6}\left(h_x\frac{\partial}{\partial x}+h_y\frac{\partial}{\partial y}+h_z\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 f(\vec{r}+\vartheta\vec{h})\right| = \left|\frac{1}{6}\left(h_x+h_y+h_z\right)^3\cdot\frac{1}{27}\cos\left(\frac{x+y+z+\vartheta(h_x+h_y+h_z)}{3}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{162}\cdot\left|h_x+h_y+h_z\right|^3$$

Unter der Einschränkung

$$h_x^2+h_y^2+h_z^2\leq r^2$$

wird Δ Maximal wenn h_x, h_y, h_z gleiche Vorzeichen haben. Seien also o.B.d.A $h_x, h_y, h_z > 0$. Ferner wird Δ maximal wenn

$$h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 = r^2$$

und $h_x + h_y + h_z$ maximal wird. Dies ist eine normale Extremwertaufgabe und es ergibt sich dass Δ maximal wird für $h_x = h_y = h_z = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$ also

$$\Delta_{\max} = \frac{r^3}{18\sqrt{3}} \overset{!}{\leq} 10^{-3} \;\rightarrow\; r \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{6}}{10} \approx 0.3147$$

Aufgabe 06

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $(x,y) \neq (0,0)$ auf jeden Fall stetig. Betrachten deshalb den Fall $(x,y) = 0$.

$$\lim_{\vec{r}\to 0} f = \lim_{\vec{r}\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{\vec{r}\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2}} = \lim_{\vec{r}\to 0} \operatorname{sgn}(x)\cdot y = 0 = f(0)$$

Die Funktion f ist also überall stetig. Die Partiellen Ableitungen ergeben sich als

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy(x-y)+y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\;\; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{yx(y-x)+x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sie existieren für $\vec{r} \neq \vec{0}$. Im Ursprung sind sie nicht definiert!

Aufgabe 07

Da für $z = 0$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \cos z \neq 0 \;\rightarrow\; \exists \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}$$

und F stetig differenzierbar ist, kann aufgrund des Hauptsatzes über implizite Funktionen in einer Umgebung von $(0,0,0)$ F nach $z = z(x,y)$ aufgelöst werden:

$$z = -\arcsin\left(x^4 + 2x\cos y\right)$$

Die Funktion $z = z(x,y)$ wird 0 für $x = 0$ oder $y = \arccos\left(-2x^3\right)$. Die partiellen Ableitungen ergeben sich als

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x^3 + 2\cos y}{\sqrt{1-(x^4+2x\cos y)^2}} = -2,\;\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x\sin y}{\sqrt{1-(x^4+2x\cos y)^2}} = 0$$

Aufgabe 08

Betrachten $\vec{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x, y \neq 0$.

$$f(x,y) = x^3y^2(1-x-y),\;\; \nabla f = x^2y\cdot(y(3-4x-3y),\; x(2-2x-3y)) \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2},\;\; y = \frac{1}{3}$$

Wir zeigen dass tatsächlich ein Extremum vorliegt:

$$H := f'' = \begin{pmatrix} \partial_{x^2} f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{y^2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^2(1-2x-y) & xy(6x-8x^2-9xy) \\ xy(6x-8x^2-9xy) & 2x^3(1-x-3y) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Da H negativ definit ist, liegt ein lokales, isoliertes, Maximum vor.
Betrachten jetzt Extrema auf den Koordinatenachsen, erlauben also $x = 0$ bzw. $y = 0$. Für $x = 0$ ist $\nabla f = 0$ und f'' die Nullmatrix, also semidefinit. Auf der Achse $x = 0$ ist jedoch $f = 0 \;\forall\; y \in \mathbb{R}$, entlang der Y-Achse also konstant, es kann deshalb erstmal kein isoliertes Extremum vorliegen. Wir wollen jedoch kleine Änderungen $\delta x, \delta y$ betrachten:

- Fall : $y = 1$
$$\delta f = -(\delta x)^3 (1+\delta y)^2 (\delta x + \delta y)$$
Für $\delta x > 0$ und $\delta y < -\delta x$ ist $\delta f > 0$. Für $\delta x > 0$ und $\delta y = 0$ ist $\delta f < 0$. Es liegt also kein Extremum vor.

- Fall : $y \neq 1$, dann sei $|\delta x + \delta y| < |1-y|$
$$\delta f = -(\delta x)^3 \underbrace{(y+\delta y)^2}_{\geq 0} (1 - y - \delta y - \delta x)$$
Für $y = 0$ sei $\delta y \neq 0$. Das Vorzeichen von δf ist gegeben durch $\operatorname{sgn}(\delta x) \cdot \operatorname{sgn}(1-y)$ und somit auch hier abhängig von δx.

Es kann also kein Extremum auf der Y-Achse vorliegen.
Wir betrachten jetzt die X-Achse, also $y = 0$ und $x \neq 0$. Dann ist $\nabla f = 0$ und
$$f'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3(1-x) \end{pmatrix}$$
wieder semidefinit. Auf der X-Achse ist $f = 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$, es kann somit kein isoliertes Extremum vorliegen. Betrachten jedoch kleine Änderungen $\delta x, \delta y$:

- Fall : $x = 1$
$$\delta f = -(1+\delta x)^3 (\delta y)^2 (\delta x + \delta y)$$
Das Vorzeichen von δf hängt auch hier von δx und δy ab.

- Fall : $x \neq 1$, dann sei $|\delta x + \delta y| < |1-x|\,,\ |\delta x| < |x|$.
$$\delta f = (x+\delta x)^3 (\delta y)^2 (1 - x - \delta x - \delta y) \;\rightarrow\; \operatorname{sgn}(\delta f) = \operatorname{sgn}(x^3(1-x)) = const$$
Es liegt also ein lokales Extremum vor.

Es liegt also ein (nicht isoliertes) lokales Extremum fast überall auf der X-Achse vor, d.h für $1 \neq x \neq 0$. Für $x \in (\infty, 0) \cup (1, \infty)$ liegt immer ein Maximum vor. Für $x \in (0,1)$ liegt ein Minimum vor.

Aufgabe 09

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x \; dx = -\left[e^{-\alpha x} \cdot \frac{x}{\alpha} + e^{-\alpha x} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha^2}$$

Aufgabe 10

$$\int_Q f(x,y) \; d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x+y+1} \; dx \; dy = \int_0^1 \left(\ln(2+y) - \ln(1+y) \right) \; dy$$

$$= \left[(2+y)\left(\ln(2+y) - 1\right) - (1+y)\left(\ln(1+y) - 1\right) \right]_0^1 = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln \frac{27}{16}$$