Klausur zur Analysis II
FSU Jena - WS 07

Dozent: Prof. W. Sickel

März 30, 2007

- Alle angegebenen Lösungswege müssen durchschaubar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.
- Es sind keine Hilfsmittel, insbesondere keine Taschenrechner oder Laptops, erlaubt.

Aufgaben

1) (6 Punkte) Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

2) (7 Punkte) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

3) (4 Punkte) Wir rüsten den $\mathbb{R}^2$ mit der Norm $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ aus.
Ist dann die Abbildung $f(x,y) : D \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch
$$f(x,y) := (\cos(x-y), 0)$$
eine Kontraktion in $D := [-\pi/8, \pi/8] \times [-\pi/8, \pi/8]$?

4) (6 Punkte) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion
$$f(x,y,z) := z \sin \pi(x+y) e^{x+y^2+z^3}$$
an der Stelle $(1,1,1)$ in Richtung $\left(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\right)$.

5) (10 Punkte) Berechnen Sie das Taylorpolynom T der Ordnung zwei der Funktion
$$f(x,y,z) := \cos \frac{x+y+z}{3}$$
mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, \pi, \pi)$. Geben Sie einen Radius $r > 0$ an, so dass die Differenz $|f(x,y,z) - T(x,y,z)|$ unterhalb von 10^{-3} bleibt für alle (x,y,z) mit $\|(x,y,z) - (\pi,\pi,\pi)\|_2 < r$.

6) (6 Punkte) Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Funktion
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & : x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & : x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
stetig?
Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ existieren die partiellen Ableitungen erster Ordnung?

7) (7 Punkte) Gegeben ist die Funktion
$$F(x,y,z) := x^4 + 2x \cos y + \sin z$$
Kann man die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(0,0,0)$ nach z auflösen?
Wenn ja, was kann man über die Regularität der Funktion $z = f(x,y)$ sagen? Berechnen Sie gegebenfalls $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ bzw. $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

8) (9 Punkte) Bestimmen Sie diejenigen lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) := x^3y^2(1-x-y)$$

die nicht auf den Koordinatenachsen liegen. Besitzt f globale Extremwerte?
Wer 4 Zusatzpunkte möchte, klärt noch ab, ob es lokale Extremwerte auf den Achsen gibt.

9) (4 Punkte) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das unbestimmte Integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x \, dx$$

10) (4 Punkte) Berechnen Sie das Rieman-Integral

$$\int_Q f(x,y) \, d(x,y)$$

mit $Q = [0,1] \times [0,1]$ und

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y+1}$$

Maximale Punktzahl: 63
Minimale Punktzahl zum Bestehen: 24