Wiederholungsklausur zur Analysis II
FSU Jena - SS 07

Dozent: Prof. B. Carl

Oktober 19, 2007

---

01 - Integration

a) (3 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

02 - Metrische und normierte Räume, Stetigkeit

a) (2 Punkte) Was versteht man unter einer stetigen multilinearen Abbildung

$$f : E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \to F$$

wobei $E_1, ..., E_n, F$ normierte Räume sind?

b) (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch das Skalarprodukt

$$f_A(x,y) := < Ax, y >$$

wobei A eine lineare Abbildung ist. Ist f eine stetige Abbildung?

c) (3 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in allen Punkten des $\mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit.

d) (3 Punkte) Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?

e) (3 Punkte) Sei $[E, \|\cdot\|]$ ein Banachraum und $A : E \to E$ eine lineare Abbildung mit $\|A\| < 1$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : E \to E$ mit $f(x) = Ax$ genau einen Fixpunkt besitzt und geben Sie diesen an.

03 - Differentiation

a) (2 Punkte) Sei $f : D \subset E \to F$ eine Funktion von einer offenen Menge D eines Banachraumes E in ein Banachraum F. Was heißt es, dass f in $a \in D$ differenzierbar ist?

b) (2 Punkte) Was versteht man unter den partiellen Ableitungen einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$.

c) (3 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in allen Punkten des $\mathbb{R}^2$, wo diese existieren.

d) (3 Punkte) Geben Sie alle Punkte an, wo die unter (c) definierte Funktion differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

04 - Taylorscher Satz und lokale Extreme

a) (5 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $[a, a+h] \subset D,\ f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R}^m),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ x = (x_1, ..., x_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0,\ x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n$. Definieren Sie die Symbole $x^\alpha,\ \partial^\alpha,\ \alpha!,\ |\alpha|$ und formulieren Sie mit deren Hilfe den Taylorschen Satz.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Grades für $f(x, y) = \sin(x + y)$ im Punkt $(0, 0)$.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

d) (4 Punkte) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrema von

$$f(x, y, z) = (x \cdot y \cdot z)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

05 - Wegintegrale

a) (2 Punkte) Was versteht man unter einem rektifizierbaren Weg?

b) (3 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\ ds$$

wobei γ eine Windung der Schraubenlinie

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \\ b \cdot t \end{pmatrix},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

ist.