Klausur zur Analysis II
FSU Jena - SS 06
- Lösungen -

Stilianos Louca

6. August 2007

Aufgabe 01

Eine nichtleere Menge $\emptyset \neq X$ und eine binäre Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ heisst metrischer Raum. Die Abbildung d nennt man Metrik und sie erfüllt $\forall\ x, y, z \in X$ folgende Bedingungen:

a) Definitheit: $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$

b) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$

c) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Aufgabe 02

a) $a \in X$ ist innerer Punkt von $A \subset X$:$\Leftrightarrow$

$$\exists\ \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A$$

b) $A \subset X$ heisst offen :$\Leftrightarrow$

$$\forall\ x \in A : \exists\ \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^o(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \subset A$$

Aufgabe 03

Eine Funktion $f : D \subset X \to Y$ heisst stetig in $\xi \in D$:$\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta > 0 : f\left(B_\delta^o(\xi) \cap D\right) \subset B_\varepsilon^o(f(\xi))$$

Aufgabe 04

Eine Funktion $f : D^o \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst in $\xi \in D^o$ differenzierbar :$\Leftrightarrow$

$$\exists\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ \exists\ \delta > 0,\ \exists\ r(h) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m :$$

$$\forall\ h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta \ \Rightarrow\ \xi + h \in D^o \ \wedge\ f(x + h) = f(x) + Ah + r(h) \ \wedge\ \lim_{\|h\| \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Aufgabe 05

Sei $f : D^o \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige $k+1$ mal stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei $a \in D^o$ und für ein $h \in \mathbb{R}^n : \{a+th : t \in [0,1]\} \subset D^o$. Dann gilt für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ die Taylor-Formel:

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{\partial^{|\alpha|} f(a)}{\alpha!} h^\alpha + \mathcal{R}_k^a(h)$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex ist, und

$$\alpha! := \prod_{i=1}^{n} \alpha_i! \ , \quad |\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ , \quad \partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \ , \quad h^\alpha := \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i}$$

Für das Restglied $\mathcal{R}_k^a$ gilt

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\mathcal{R}_k^a(h)}{\|h\|^k} = 0$$

und eine Form wäre die Lagrange Form

$$\mathcal{R}_k^a(h) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^{k+1} f(a+\vartheta h)}{\alpha!} h^\alpha$$

für ein geeignetes $\vartheta \in (0,1)$. Eine andere Form wäre

$$\mathcal{R}_k^a(h) = (k+1) \cdot \int_0^1 (1-t)^k \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^{k+1} f(a+th) \ h^\alpha \ dt$$

Aufgabe 06

Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial e}(\xi)$ einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\xi \in U$ ist definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial e}(\xi) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + te) - f(\xi)}{t}$$

Aufgabe 07

Sei $F = F(x,y) : (D^o \times G^o) \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$, $\emptyset \neq D^o \times G^o \ offen$, stetig differenzierbar und seien Punkte $\xi \in D^o$, $\eta \in G^o$ so dass $F(\xi, \eta) = 0$. Sei ferner die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)$ invertierbar. Dann gibt es offene Kugeln $B_\delta^o(\xi) \subset D^o$ und $B_\varepsilon^o(\eta) \subset G^o$, und eine stetige Abbildung $f : B_\delta^o(\xi) \to B_\varepsilon^o(\eta)$ mit $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0$. Dabei ist $y = f(x)$ der einzige Wert aus $B_\varepsilon^o(\eta)$ so dass die Gleichung $F(x,y)$ erfüllt ist. Ferner existiert eine weitere offene Kugel $B_\rho^o(\xi) \subset B_\delta^o(\xi)$ so dass $f : B_\rho^o(\xi) \to B_\varepsilon^o(\eta)$ stetig differenzierbar ist, und es gilt:

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

Ist F k-mal stetig differenzierbar, so ist auch f in einer offenen Umgebung von ξ k-mal stetig differenzierbar.

Aufgabe 08

Eine Funktion $f : U^o \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ hat in $(\xi, \eta) \in U$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$, $g : U^o \to \mathbb{R}^m$ ein lokales Maximum $:\Leftrightarrow$ Es gilt $g(\xi, \eta) = 0$ und es existiert eine offene Umgebung $\emptyset \neq B^o \subset U^o$ mit $(\xi, \eta) \in B^o$ so dass

$$\forall \ (x,y) \in B^o, \ g(x,y) = 0 \ \Rightarrow \ f(x,y) \leq f(\xi, \eta)$$

Aufgabe 09

Seien $I_x \subset \mathbb{R}^k,\ I_y \subset \mathbb{R}^l$ Intervalle, und ist $I := I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{k+l}$. Dann gilt:
Ist $f \in B(I)$ $\mathcal{R}$-Integrierbar und

$$\exists\ g(y) := \int_{I_x} f(x,y)\ dx \quad \forall\ y \in I_y$$

so ist g auf I_y $\mathcal{R}$-Integrierbar und es gilt:

$$\int_I f\ d(x,y) = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x,y)\ dx \right) dy$$

Aufgabe 10

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & : \vec{r} \neq \vec{0} \\ 0 & : \vec{r} = \vec{0} \end{cases}$$

$$Sei\ \vec{r}_n := (x_n, y_n),\ x_n = y_n = \frac{1}{n} \ \to\ f(\vec{r}_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{1}{n^2} + 1} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \neq 0 = f(0)$$

Die Funktion ist im Nullpunkt nicht stetig.

Aufgabe 11

$$f(x,y) = x^y,\ \left(T_2^\xi f\right)(h) = f(\xi) + \frac{\partial f(\xi)}{\partial x} h_x + \frac{\partial f(\xi)}{\partial y} h_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} h_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial y^2} h_y^2 + \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x \partial y} h_x h_y$$

$$= x^y + y \cdot x^{y-1} h_x + x^y \ln x \cdot h_y + \frac{h_x^2}{2} \cdot y(y-1)x^{y-2} + \frac{h_y^2}{2} \cdot x^y \ln^2 x + x^{y-1} \cdot (y \ln x + 1) \cdot h_x h_y$$

$$= 1 - h_x + h_x^2 + h_x h_y$$

Aufgabe 12

Da $\mathbb{R}^2$ offen ist gilt für jeden Extremwert $\nabla f = 0$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,\ \nabla f = \left(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\to\ x \cdot (x^3 - 1) = 0 = y(y^3 - 1) = 0\ \wedge\ y = x^2\ \to\ (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}$$

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$Fall\ (0,0) : f''\ Indefinit\ \to\ Kein\ Extremum$$

$$Fall\ (1,1) : f''\ Positiv\ definit\ \to\ Lokales,\ isoliertes\ Minimum$$

Aufgabe 13

$$f(x,y) = xe^y - ye^x + x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = xe^y - e^x \mid_0 = -1 \neq 0 \ \rightarrow \ \exists\, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y = g(x)$$

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{ye^x - e^y - 1}{xe^y - e^x} = 2$$

Aufgabe 14

Für beliebige $x, y \in [1,2]$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x+2}{x+1} - \frac{y+2}{y+1}\right| = \left|\frac{y-x}{(x+1)(y+1)}\right| \leq \frac{1}{4}\,|y-x| \ \rightarrow \ Kontraktion$$

Für den Fixpunkt a gilt

$$a = f(a) = \frac{a+2}{a+1} \ \rightarrow \ a^2 = 2 \ \rightarrow \ a = \sqrt{2}$$

Aufgabe 15

$$\int_G (x^2+y^2)\ dx\ dy = \int_0^2 \int_{y^2/2}^{y} (x^2+y^2)\ dx\ dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{y^2/2}^{y} dy = \int_0^2 \left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{2} - \frac{y^6}{24}\right) dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{3} - \frac{y^5}{10} - \frac{y^7}{7 \cdot 24}\right]_0^2 = \frac{48}{35}$$

Aufgabe 16

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} = \ln^2 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = \ln^2 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$$

konvergiert genau dann wenn das Integral

$$\int_1^{\infty} f(x+1)\ dx = \int_2^{\infty} f(x) dx$$

konvergiert, da f streng monoton fallend ist.

$$\int_2^{\infty} f(x)\ dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{R \to \infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^R = -\frac{1}{\ln 2} \in \mathbb{R} \quad \square$$

Aufgabe 17

$$f(\vec{r}) = x^3 + 2x\sin y + z\cos z = 1 : const,\ \ P(1, 2\pi, 0) \in \mathbb{R}^3$$

$$Normalenvektor:\ \ \vec{N} = \nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2\sin y \\ 2x\cos y \\ \cos z - z\sin z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Tangentialebene:\ \ (\vec{r} - P) \cdot \vec{N} = 0\ \ \rightarrow\ \ 3x + 2y + z - 3 - 4\pi = 0$$

Aufgabe 18

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\rho\ d\varphi\ d\rho = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho^3\ \ d\varphi\ \ d\rho = \int_0^a 2\pi\rho^3\ \ d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}$$