Klausur zur Analysis II
FSU Jena - SS 04
- Lösungen -

Stilianos Louca

4. August 2007

Aufgabe 01

a)
$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x \; dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

b)
$$\int \sin^3 x \cos^2 x \; dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \cdot \sin x \; dx = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

c)
$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln \left| x^2+1 \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C$$

Aufgabe 02

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2 \cdot \left[\arctan \sqrt{1-x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 03

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = \left(x^3 + y^3 \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{x^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}, \; \frac{y^2}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}} \right) : \textit{stetig} \; \forall \; x \neq -y$$

Da $\operatorname{grad} f$ für $x = -y$ nicht definiert ist, jedoch im restlichen $\mathbb{R}^2$ sogar stetig ist, ist f für alle $x \neq -y$ differenzierbar.

Aufgabe 04

$$f = \frac{\cos x}{\cos y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; \left(T_2^0 f \right)(h) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x} h_x + \frac{\partial f}{\partial y} h_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} h_y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_x h_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\sin x}{\cos y}, \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos x}{\cos^2 y} \sin y, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\cos x}{\cos y}, \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\cos x \cdot (1 + \sin^2 y)}{\cos^3 y} \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}$$

$$\to \; \left(T_2^o f \right)(h) = 1 - \frac{h_x^2}{2} + \frac{h_y^2}{2}$$

Aufgabe 05

Definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \sum_{i=1}^{3} \|\vec{r} - \vec{r}_1\|_2^2 = \sum_{i=1}^{3} \left\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right\}$$

und suchen deren Minimum in $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f = \left(\sum_{i=1}^{3} 2(x-x_i),\ \sum_{i=1}^{3} 2(y-y_i) \right) \stackrel{!}{=} 0 \ \to\ x = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} x_i \ \wedge\ y = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} y_i$$

Wollen jetzt beweisen dass dies auch ein Minimum ist:

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} : positiv\ definit\ \forall\ \vec{r} \in \mathbb{R}^2$$

Es liegt also ein isoliertes, lokales Minimum vor.

Aufgabe 06

a)

$$z = 2u + v,\ \vec{F} := \begin{pmatrix} x - u - \ln v \\ y - v + \ln u \end{pmatrix} = 0$$

$$H := \frac{\partial \vec{F}}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{v} \\ -\frac{1}{u} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = 1 + \frac{1}{uv} \neq 0 \ \to\ \exists \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial(u,v)} \right)^{-1} \ \to\ (u,v) = f(x,y) \ \to\ z = z(u,v) = z(x,y) \qquad \square$$

b)

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = - \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial(u,v)} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial(x,y)} = - \frac{1}{1+vu} \cdot \begin{pmatrix} vu & -u \\ v & vu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \frac{1}{1+vu} \cdot \begin{pmatrix} vu & -u \\ v & vu \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{v(1+2u)}{1+vu}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u(2-v)}{1+vu}$$

Aufgabe 07

$$F(x_1, ..., x_n, \lambda) := z + \lambda g,\ g := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - na \equiv 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 4x_i^3 + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \ \to\ x_1 = x_2 = ... = x_n \ \to\ x_i = a,\ i = 1, ..., n$$

Wollen jetzt zeigen dass ein Extremum vorliegt.

$$H := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} = \left(12 x_i^2 \delta_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$

Für $a \neq 0$ ist H positiv definit (positiver Eigenwert $12a^2$), insbesondere auf dem Nullraum von g', und es liegt somit ein isoliertes, lokales, Minimum vor! Ist $a = 0$ dann müssen alle $x_i = 0$ und die Funktion $z \geq 0$ besitzt auch in dem Fall ein isoliertes, lokales Minimum (da globales).

Aufgabe 08

a)

$$2\sqrt{y} = y' \;\rightarrow\; \sqrt{y} = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx = x + C \;\rightarrow\; y = (x+C)^2\,,\; x \geq -C \in \mathbb{R}$$

b)

$$y' + x^2 y = x^2 \; Homogene: \; y = Ce^{-\frac{x^3}{3}},\; Inhomogene: y = 1 \rightarrow \; y = Ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1,\; C \in \mathbb{R}$$

c)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \cdot y,\; Ansatz: \; y = e^{\lambda x} \cdot \vec{d}$$

$$\rightarrow \; (I\lambda - A) \cdot \vec{d} = 0 \;\rightarrow\; \det(I\lambda - A) = 0 \;\rightarrow\; \lambda \in \{-7, -4\}$$

$$\rightarrow \; \vec{d_1} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\; \vec{d_2} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; y = \begin{pmatrix} \alpha e^{-7x} + 2\beta e^{-4x} \\ -\alpha e^{-7x} + \beta e^{-4x} \end{pmatrix}$$