Optimierungsprobleme - Einige Beispiele

Stilianos Louca

18. Oktober 2008

1 Der n-Dimensionale Quader

Betrachten wir ein Rechteck der Kantenlänge a × b, wobei $a + b =: \sigma$: const. Die Frage lautet: für welche(positiven) Werte von a,b wird die Fläche $A = a \cdot b$ maximal? Antwort:

$$a = b = \frac{\sigma}{2} \rightarrow A_{max} = \frac{\sigma^2}{4}$$

Wir wollen diese Aussage auf das hyper-Volumen von n-Dimensionalen Quadern verallgemeinern:

$$\text{Seien } a_1, a_2, .., a_n \ \in R^+ \text{ frei wählbar : } \sum_{i=1}^{n} a_i = \sigma = const.$$

$$\text{Sei } P_n := \prod_{i=1}^{n} a_i \ und \ \hat{P}_n : \text{der Maximalwert von } P_n$$

$$\text{Zu zeigen: } P_n = \hat{P}_n = \frac{\sigma^n}{n^n} \ für \ a_i = \frac{\sigma}{n} \ \forall \ 1 \leq i \leq n$$

$$\text{dh: } \left(\exists \ i : a_i \neq \frac{\sigma}{n}\right) \Rightarrow \left(P_n < \hat{P}_n\right)$$

Beweis

Induktionsanfang:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = \sigma \ und \ \hat{P}_1 = \sigma$$

Induktionsannahme:

$$\hat{P}_n = \frac{\sigma^n}{n^n} \ für \ a_i = \frac{\sigma}{n} = \ \forall \ 1 \leq i \leq n$$

Induktionsschritt:

$$P_{n+1} = a_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$Sei \ a_{n+1} > 0 \ beliebig \ aber \ fest. \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \sigma - a_{n+1} =: \sigma' = const$$

$$\hat{P'}_{n+1} := \hat{P}_n \cdot a_{n+1}, \ \hat{P}_{n+1} = max\left\{\hat{P'}_{n+1} \mid a_{n+1} \in R^+\right\}$$

$$\hat{P'}_{n+1} = \left(\frac{\sigma'}{n}\right)^n \cdot a_{n+1} = \left(\frac{\sigma - a_{n+1}}{n}\right)^n \cdot a_{n+1}, \ für \ a_i = \frac{\sigma - a_{n+1}}{n} \ \forall i \leq n$$

$$f(x) := \frac{(\sigma - x)^n \cdot x}{n^n}, \ x \leq \sigma, \ f'(x) := \frac{df(x)}{dx} = \frac{(\sigma - x)^{n-1}}{n^n} \cdot [\sigma - x(n+1)]$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{\sigma}{n+1}\right) \vee (x = \sigma)$$

Für $x=\sigma$ ist f minimal. Für $x=\dfrac{\sigma}{n+1}$ ist f maximal (wäre noch zu zeigen).

$$\Rightarrow \hat{P'}_{n+1} \text{ max } f\ddot{u}r\ a_{n+1}=\frac{\sigma}{n+1} \rightarrow a_i=\frac{\sigma}{n+1}\ \forall i$$

$$\Rightarrow \hat{P}_{n+1}=\left(\frac{\sigma}{n+1}\right)^{n+1},\ f\ddot{u}r\ a_i=\frac{\sigma}{n+1}\ \forall\ 1\le i\le n+1$$

2 Interpolation affiner Abbildungen

Es seien

$$x_1,...,x_N\in\mathbb{R}^n\ ,\ y_1,...,y_N\in\mathbb{R}^m,\ N>\min\{n,m\}$$

beliebige Punkte, so dass $x_i\neq x_j$ für $i\neq j$. Gesucht ist eine affine Transformation

$$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\ ,\ F(x)=Ax+B\ ,\ A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\ ,\ B\in\mathbb{R}^m$$

so dass

$$\mathcal{E}(A,B):=\sum_{i=1}^N\|y_i-F(x_i)\|^2$$

extremal (gegebenfalls minimal) wird. Dabei sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm.

Ansatz

Die Funktion $\mathcal{E}:\mathbb{R}^{n+m}\to[0,\infty)$, mit Parametern $A^{jk},B^j,\ k=1,..,n,\ j=1...m$, ist offensichtlich *glatt*. An lokalen Extrema $A_0\in\mathbb{R}^{n\cdot m},B_0\in\mathbb{R}^m$ muss demnach gelten

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial A^{jk}}(A_0,B_0)=\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial B^j}(A_0,B_0)=0\ ,$$

Schreiben also:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial A^{jk}}=\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial A^{jk}}\sum_{l=1}^m\left[y_i^l-F^l(x_i)\right]^2=-2\sum_{i=1}^N\sum_{l=1}^m\left[y_i^l-F^l(x_i)\right]\cdot\frac{\partial F^l(x_i)}{\partial A^{jk}}$$

$$=-2\sum_{i=1}^N\sum_{l=1}^m\left[y_i^l-\sum_{r=1}^nA^{lr}x_i^r-B^l\right]\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial A^{jk}}\left[\sum_{p=1}^nA^{lp}x_i^p+B^l\right]}_{\delta_{jl}\delta_{kp}x_i^r}=-2\sum_{i=1}^N\left[y_i^j-\sum_{r=1}^nA^{jr}x_i^r-B^j\right]x_i^k\overset{!}{=}0$$

$$\Rightarrow\ \sum_{r=1}^nA^{jr}\underbrace{\sum_{i=1}^Nx_i^rx_i^k}_{a_{kr}}+B^j\underbrace{\sum_{i=1}^Nx_i^k}_{\alpha^k}=\underbrace{\sum_{i=1}^Ny_i^jx_i^k}_{b^{jk}}\quad,\quad j=1,..,m,\ k=1,..,n$$

bzw.

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial b^j}=-2\sum_{i=1}^N\sum_{l=1}^m\left[y_i^l-\sum_{r=1}^nA^{lr}x_i^r-B^l\right]\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial b^j}\left[\sum_{p=1}^nA^{lp}x_i^p+B^l\right]}_{\delta_{jl}}=-2\sum_{i=1}^N\left[y_i^j-\sum_{r=1}^nA^{jr}x_i^r-B^j\right]\overset{!}{=}0$$

$$\Rightarrow\ \sum_{r=1}^nA^{jr}\underbrace{\sum_{i=1}^Nx_i^r}_{\tilde{a}^r}+B^jN=\underbrace{\sum_{i=1}^Ny_i^j}_{\tilde{b}^j}\quad,\quad j=1,..,m$$

Obere $(n \cdot m + m)$ Gleichungen stellen ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem, mit den Unbekannten

$$A^{jk}, B^{j},\ j = 1, .., m,\ k = 1, .., n$$

gemäß

$$\begin{pmatrix}
a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & 0 & \dots & 0 & \alpha^{1} & 0 & \dots & 0 \\
a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2n} & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & 0 & \dots & 0 & \alpha^{2} & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & & \dots \\
a^{n1} & a^{n2} & \dots & a^{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & 0 & \dots & 0 & \alpha^{n} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & a^{11} & \dots & a^{1n} & \dots\dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha^{1} & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a^{n1} & \dots & a^{nn} & \dots\dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha^{n} & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & a^{11} & \dots & a^{1n} & 0 & 0 & \dots & \alpha^{1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & a^{nn} & \dots & a^{nn} & 0 & 0 & \dots & \alpha^{n} \\
\tilde{a}^{1} & \tilde{a}^{2} & \dots & \tilde{a}^{n} & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & 0 & \dots & 0 & N & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & \tilde{a}^{1} & \dots & \tilde{a}^{n} & 0 & 0 & \dots & N
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{11} \\ A^{12} \\ \vdots \\ A^{1n} \\ A^{21} \\ \vdots \\ A^{2n} \\ \vdots \\ A^{mn} \\ B^{1} \\ \vdots \\ B^{m} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} b^{11} \\ b^{12} \\ \vdots \\ b^{1n} \\ b^{21} \\ \vdots \\ b^{2n} \\ \vdots \\ b^{mn} \\ \tilde{b}^{1} \\ \vdots \\ \tilde{b}^{m} \end{pmatrix}$$

dar. Nach lösen diese