Übungen zur Analysis I WS 07/08

11. Serie

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital

*(a) **(2 P.)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}\quad (a,b>0)$

*(c) **(2 P.)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

* **2.** **(2 P.)** Beweisen Sie die Ungleichungen

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad \text{für} \quad x>0$$

Hinweis: Wenden Sie den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x)=\log(1+x)$ an.

3. Die Legendre-Polynome L_n sind definiert als

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass L_n genau n Nullstellen zwischen -1 und 1 hat.

(b) Berechnen Sie $L_n(1)$ und $L_n(-1)$.

(c) Zeigen Sie $(x^2-1)L_n''(x)+2x\,L_n'(x)-n(n+1)L_n(x)=0$.

Hinweis: Zeigen Sie $f'(x)(x^2-1)=2n\,x\,f(x)$ für $f_n(x)=(x^2-1)^n$.

4. Berechnen Sie Supremum und Infimum der Mengen

(a) $M=\{(1+x)\sqrt{1-x^2} : 0<x<1\}$

(b) $M=\{x^x : 0<x<1\}$

* **5.** **(3 P.)** Ein Kellergang der Breite a mündet rechtwinklig in einen Kellergang der Breite b. Wie lang darf eine rechteckige Platte sein, damit sie von dem einen in den anderen Kellergang transportiert werden kann?

Zu den mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **21. 1.** bis **25. 1.** in den Übungen abzugeben.