

Übungen zur Differential- und Integralrechnung I (WS 07/08)

10. Serie

1.) Differenzieren Sie die Funktionen

a) $f(x) = |(x-1)^2(x+1)^3|$

b) $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$

*c) (2 P.) $f(x) = x^{x^x}$

*d) (2 P.) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

*2.) (3 P.) Zeigen Sie für $|x| \geq 1$

$$2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi & \text{für } x \geq 1 \\ -\pi & \text{für } x \leq -1 \end{cases}$$

Hinweis: Differenzieren Sie die Funktion auf der linken Seite.

3.) Berechnen Sie für $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ableitungen bekannter Funktionen.

4.) Es sei $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} \quad \text{für } x \neq 0,$$

wobei P_n Polynome sind.

5.) Bestätigen Sie die Darstellungen

*a) (2 P.) $\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

b) $\operatorname{Arcosh} x = \pm \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$

c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$

d) $\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 14.01. - 18.01. in den Übungen abzugeben.