

# Übungen zur Differential- und Integralrechnung I (WS 07/08)

## 7. Serie

**\*1.** Berechnen Sie die Grenzwerte

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$  ,      b)\* **(2 P.)**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3x^2-9x+6} \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$  ,      d)\* **(2 P.)**  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

**2.** Beweisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen in den angegebenen Punkten mit Hilfe der  $\epsilon - \delta$ - Definition:

a)  $f(x) = x^2$  bei  $x_0 = 2$       b)  $f(x) = \frac{x-1}{2(x+1)}$  bei  $x_0 = 3$ .

**3.** Für  $0 < x < 1$  sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \text{ irrational} \\ 1/q & \text{wenn } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

In welchen Punkten  $x$  ist  $f$  stetig?

**4.** Sei  $[y] := \max\{r \in \mathbb{Z} : r \leq y\}$ .

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1/[1/x] & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

im Punkt  $x_0 = 0$  stetig?

**\*5. (2 P.)** Es sei  $f$  eine stetige Funktion von  $[0,1]$  nach  $[0,1]$ , Zeigen Sie, dass  $f$  mindestens einen Fixpunkt  $x$  (d.h.  $f(x) = x$ ) hat.

**\*6. (3 P.)** Was heißt, eine Funktion ist nicht gleichmäßig stetig? Geben Sie die Formulierung in der " $\epsilon - \delta$ -Sprache" an. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = x^2$  auf  $\mathbb{R}$  nicht gleichmäßig stetig ist.

Zu den mit \* gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 10.12. - 14.12. in den Übungen abzugeben.