

Übungen zur Differential- und Integralrechnung I (WS 07/08)

7. Serie

***1.** Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$, b)* **(2 P.)** $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3x^2-9x+6} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$, d)* **(2 P.)** $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

2. Beweisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen in den angegebenen Punkten mit Hilfe der $\epsilon - \delta$ - Definition:

a) $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 2$ b) $f(x) = \frac{x-1}{2(x+1)}$ bei $x_0 = 3$.

3. Für $0 < x < 1$ sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \text{ irrational} \\ 1/q & \text{wenn } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

In welchen Punkten x ist f stetig?

4. Sei $[y] := \max\{r \in \mathbb{Z} : r \leq y\}$.

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1/[1/x] & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = 0$ stetig?

***5. (2 P.)** Es sei f eine stetige Funktion von $[0,1]$ nach $[0,1]$, Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt x (d.h. $f(x) = x$) hat.

***6. (3 P.)** Was heißt, eine Funktion ist nicht gleichmäßig stetig? Geben Sie die Formulierung in der " $\epsilon - \delta$ -Sprache" an. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2$ auf \mathbb{R} nicht gleichmäßig stetig ist.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 10.12. - 14.12. in den Übungen abzugeben.