Übungen zur Differential- und Integralrechnung I (WS 07/08)

6. Serie

***1. (3 P.)** Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1)$.

***2. (3 P.)** Die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$ konvergiert (warum?).

Zeigen Sie, dass die umgeordnete Reihe

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - - \cdots$$

gegen einen anderen Grenzwert konvergiert.

3. Entscheiden Sie in Abhängigkeit von $y > 0$ und x reell, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n}$ konvergiert.

***4. (2 P.)** Es sei $E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$.

Zeigen Sie $E(x)E(y) = E(x + y)$.

5. Es sei $S(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$

und $C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots$.

Zeigen Sie $S(x)C(y) + C(x)S(y) = S(x + y)$.

6. Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, und die Reihe $\sum a_n$ sei konvergent.

Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie, daß die Partialsummen eine Cauchy-Folge sind.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 03.12. - 07.12. in den Übungen abzugeben.