Übungen zur Differential- und Integralrechnung I (WS 07/08)

4. Serie

1.* **(2 P.)** Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.
Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

2. Berechnen Sie

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{2n+1}$

3. Es sei $x_n = \begin{cases} (1/2)^{\frac{n+1}{2}} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ (1/3)^{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$
Berechnen Sie

(a) $\liminf \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

(b) $\limsup \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

(c) $\liminf \sqrt[n]{x_n}$

(d) $\limsup \sqrt[n]{x_n}$.

4.* **(3 P.)** Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $y_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

5. Es sei $a > 0$ und $x_0 > 0$.
Zeigen Sie für die durch $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$ definierte Folge (x_n)

(a) $x_n > 0$

(b) $x_n^2 \geq a$

(c) $x_{n+1} \leq x_n$ für $n \geq 1$

(d) $x_n \geq a/x_1$

(e) Es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

(f) $x^2 = a$.

6.* **(4 P.)** Berechnen Sie den Limes der Folge (x_n), definiert durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 19.11. - 23.11. in den Übungen abzugeben.