Übungen zur Differential- und Integralrechnung I
(WS 07/08)

2. Serie

1.) Skizzieren Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} z < 1 \;\wedge\; \operatorname{Im} z \leq 2\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| > 1 - \operatorname{Im} z\}$,

*c) **(2 P.)** $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z-1-i|^2 \leq 2 \;\wedge\; |z+1-i|^2 \leq 2\}$.

2.) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen

*a) **(1 P.)** $\dfrac{\operatorname{Re}[(2-\mathrm{i})(-2+3\mathrm{i})]}{3-4i}$,

*b) **(2 P.)** $\dfrac{(i-3)^2}{(i+1)^2} - \dfrac{i^{123}+1}{1-i}$.

3.) Berechnen Sie sämtliche Werte von

a) $\sqrt[4]{-1}$,

b) $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$.

4.) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ die Zahl $\dfrac{z-1}{z+1}$ genau dann rein imaginär ist, wenn $|z| = 1$ gilt.

*5.) **(2 P.)** Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit reellen Koeffizienten p und q habe die komplexe Lösung z_0. Zeigen Sie, dass dann auch die zu z_0 konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}_0$ Lösung ist.

6.) Zeigen Sie, dass

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.
Welcher Satz aus der elementaren Geometrie verbirgt sich dahinter?

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom 5.11. - 09.11. in den Übungen abzugeben.