Übungen zur Differential- und Integralrechnung I

WS 2007/08

1. Serie

1.) Beweisen Sie $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2.) Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$.

3.)* **(4 P.)** Beweisen Sie für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$

$$x_1 \ldots x_n = 1 \Rightarrow x_1 + \ldots + x_n \geq n .$$

Hinweis: Um die Aussage für $n+1$ zu zeigen, setzen Sie $x_n < 1$ und $x_{n+1} > 1$ voraus (warum dürfen Sie das?) Induktionsvoraussetzung auf $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$ anwenden, eventuell umnumerieren.

4.)* **(4 P.)** Das arithmetische Mittel der positiven Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ ist $a = (x_1 + \ldots + x_n)/n$, das geometrische Mittel $g = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ und das harmonische Mittel $h = n/(1/x_1 + \ldots + 1/x_n)$. Zeigen Sie $a \geq g \geq h$. Hinweis: Aufgabe 3 verwenden.

5.) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n_0, für die $2^n > n^3$ für alle $n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$ gilt.

6.) Lösen Sie die Ungleichungen

a)* **(2 P.)** $|x+3| + |x-3| > 8$

b) $||3-x| - 2| \leq |x-1|$

c) $|x^2 - 2x| > x^2 - |2x|$

d) $\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1}$

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in den Übungen in der Woche vom 29.10. bis 02.11.2007 abzugeben.