Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

11. Übungsserie

1.*) Vermuten und beweisen Sie mittels vollständiger Induktion eine Formel für $(f \cdot g)^{(n)}$, wenn f und g jeweils n-mal differenzierbar sind.

2.$^+$) Gegeben seien die folgenden Determinanten

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) \dots f_{1n}(x) \\ \vdots \\ f_{n1}(x) \dots f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$D_k'(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) \dots f_{1n}(x) \\ \vdots \\ f_{k1}'(x) \dots f_{kn}'(x) \\ \vdots \\ f_{n1}(x) \dots f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $D'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k'(x)$.

3.*) Es seien $f_1(x) = \sin x$ und $f_2(x) = \tan x$ auf $D_1 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bzw. $D_2 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ erklärt. Bestimmen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen.

4.) Sei $P_n(x) : \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$.
Zeigen Sie, dass P_n ein Polynom n-ten Grades mit n-Nullstellen im Intervall $]-1, 1[$ ist.

5.) Zeigen Sie $\dfrac{x-y}{x} < \ln \dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y}$ für $0 < y < x$.

6.) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

a)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

d)* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cotan} x - \dfrac{1}{x} \right)$ $\left(\operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \right)$

e)* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 15.01 bis 19.01.2007 abzugeben.