

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

9. Übungsserie

1.* Berechnen Sie

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{x}$

Hinweis: Nutzen Sie für die Aufgabe 1a) eine Abschätzung für den Rest bei der Polynomapproximation von e^x . Die weiteren Aufgaben löst man durch eine geeignete Substitution.

2.* Es sei $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}$$

3. Berechnen Sie

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) + \ln(a-x) - 2 \ln a}{x^2} \quad a > 0$

c) $\lim_{x \rightarrow a} (e^x + x)^{1/x}$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}$

e+) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$

f+) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad a, b, c > 0$

Bem.: Die mit ”+“ gekennzeichneten Aufgaben sind etwas schwieriger und wenden sich an Studierende mit höheren Ansprüchen.

4. Sei $T(\varphi)$ die stetig von der geographischen Länge $\varphi \in]-\pi, \pi]$ abhängende Temperatur an einem Punkt des Äquators. Zeigen Sie, dass es zwei gegenüberliegende Punkte mit gleicher Temperatur gibt.

5. A MERRY XMAS TO ALL

Zu diesem Wunsch Ihrer Analysis-Crew bedeutet jeder Buchstabe genau eine Ziffer im Dezimalsystem und somit jedes Wort eine Zahl.

Finden Sie alle Zuordnungen von Buchstaben zu Ziffern, die jedes Wort zu einer Quadratzahl machen.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 18.12 bis 22.12.2006 abzugeben.