Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

1. Übungsserie

1.) Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung,

A, B seien Teilmengen von X und
C, D Teilmengen von Y .

Man zeige

a) $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

b) $f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Überprüfen Sie in jedem Fall, ob auch die Gleichheit gilt, bzw. geben Sie ein Beispiel für eine "echte" Inklusion an.

2.) Bestimmen Sie alle $x \in I\!R$ für die

a) $\frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2x-2}$

b) $x^4 \geq |x|$

c*) $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$

d*) $\sqrt{x - 12} < x$

e*) $-x^2 < |x|$

3.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen nach oben oder unten beschränkt sind und bestimmen Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum

a) $M = \{x : x = (-1)^n + 2^{1-n} \quad n \in I\!N\}$

b) $M = \left\{ x : x = 1 + (-1)^n n^2 + \frac{1-(-1)^n}{n} \quad \begin{matrix} n \in I\!N \\ n \neq 0 \end{matrix} \right\}$

c) $M = \{x : x = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{m} \quad n, m \in I\!N \quad n, m \neq 0\}$

4.) a*) Es sei für eine beschränkte Menge $M \subseteq I\!R$: $(-M) := \{-x,\ x \in M\}$
Zeigen Sie $\inf(-M) = -\sup M$

b) Es sei für zwei beschränkte Mengen $M, N \subseteq I\!R$:
$(M + N) = \{x + y : x \in M,\ y \in N\}$
Zeigen Sie $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 23. bis 27.10.2006 abzugeben.