Analysis I - Serie 08
FSU Jena - WS 06/07
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 28, 2007

Aufgabe 1

Sei

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0,\ a_n \neq 0,\ n : ungerade$$

ein beliebiges reelles Polynom ungerader Ordnung. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = sgn(a_n) \cdot \infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -sgn(a_n) \cdot \infty$$

Da $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig folgt:

$$\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (P(x_1) < 0)\ \wedge\ (P(x_2) > 0)\ \Rightarrow\ \exists\ \xi \in (x_1, x_2) : P(\xi) = 0 \quad \square$$

Aufgabe 2

Sei $f : [a,b] \to [a,b],\ a < b$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion $h(x) := f(x) - x$ auch stetig, und es gilt:

$$f(a) \geq a\ \wedge\ f(b) \leq b$$

- Fall 1: $f(a) = a\ \vee\ f(b) = b\ \rightarrow$ fertig!
- Fall 2: $f(a) > a\ \wedge\ f(b) < b$. Dann gilt:

$$h(a) > 0\ \wedge\ h(b) < 0\ \Rightarrow\ \exists\ \xi \in (a,b) : h(\xi) = 0\ \Rightarrow\ f(\xi) = \xi \quad \square$$

Aufgabe 3

a) Sind $k, b \in \mathbb{R}$ so dass $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, und $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] - \lim_{x\to\infty} b = b - b = 0$$

also ist $y(x) := kx + b$ eine Asymptote von $f(x)$. Analoges gilt auch für $x \to -\infty$.

b) • $f_1(x) = \sqrt{Ax^2+Bx+C} \quad (A>0)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim \sqrt{A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}} = \sqrt{A}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - x\sqrt{A}\right] = \lim \frac{Ax^2+Bx+C-Ax^2}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}+x\sqrt{A}} = \lim \frac{B+\frac{C}{x}}{\sqrt{A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}}+\sqrt{A}} = \frac{B}{2\sqrt{A}}$$

$$\Rightarrow\ y(x) := \sqrt{A}x + \frac{B}{2\sqrt{A}} \quad \textit{Asymptote von } f_1$$

• $f_2(x) = \dfrac{Ax^2+Bx+C}{Dx+E} \quad (D \neq 0)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim \frac{A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}}{D+\frac{E}{x}} = \frac{A}{D}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f_2(x) - \frac{Ax}{D}\right] = \lim \frac{DAx^2+DBx+DC-ADx^2-EAx}{D(Dx+E)} = \lim \frac{DB+\frac{DC}{x}-EA}{D\left(D+\frac{E}{x}\right)} = \frac{DB-EA}{D^2}$$

$$\Rightarrow\ y(x) := \frac{A}{D}\cdot x + \frac{DE-EA}{D^2} \quad \textit{Asymptote von } f_2$$

Aufgabe 4

a) $f(x) = x^2\ ,\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\textit{Sei } \varepsilon := 1 \textit{ und } \delta > 0 \textit{ beliebig. Dann seien: } x := \frac{1}{\delta},\ y := x+\delta$$

Dann gilt:

$$|x-y| = \delta \leq \delta$$

$$\left|x^2-y^2\right| = |(x-y)(x+y)| = \delta|x+y| > 2\delta|x| = 2 > \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \textit{nicht GS} \quad \square$$

b) $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ f:[0,\infty)\to\mathbb{R}.$

$$\textit{Sei } \varepsilon > 0 \textit{ beliebig. Dann sei } \delta := \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow\ \forall\, x,y \in [0,\infty) : |x-y| < \delta\ \Rightarrow\ \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon\ \Rightarrow\ GS \quad \square$$

c) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$.

$$\textit{Sei } \varepsilon := 1 \textit{ und } \delta > 0 \textit{ beliebig. Dann}:$$

$$\exists\, x \in \left(0, \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}\right) \;\wedge\; x = \frac{2}{\pi(1+4k)},\;\; k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \;\Rightarrow\; \sin\frac{1}{x} = 1$$

$$\to\; \textit{Sei } y := \frac{x}{1+x\pi} \;\Rightarrow\; |x-y| = \left|x - \frac{x}{1+\pi x}\right| = \frac{x^2\pi}{1+x\pi} < x^2\pi < \delta$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \pi \;\Rightarrow\; \sin\frac{1}{y} = -1 \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| = 2 > \varepsilon \;\Rightarrow\; \textit{nicht GS} \quad \square$$

Aufgabe 5

Beweis durch Widerspruch: Angenommen solch eine Umgebung existiert nicht. Das heisst:

$$\forall\, \delta > 0 : \exists\, x \in U_\delta(x_0) : f(x) \leq 0$$

Sei $(\delta_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge definiert durch $\delta_n := \dfrac{1}{n}$. Es gilt:

$\delta_n \to 0 \wedge \forall\, n \in \mathbb{N} : \exists\, x_n \in U_\delta(x_0) : f(x_n) \leq 0 \;\Rightarrow\; \lim x_n = x_0 \wedge \lim f(x_n) \leq 0 \neq f(x_0) \;\Rightarrow\; \textit{nicht stetig}!\, \textit{Widerspruch}! \quad \square$