Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

8. Übungsserie

1.*) Beweisen Sie: Jedes Polynom ungerader Ordnung mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

2.) Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt Fixpunkt einer Funktion f, wenn $f(x_0) = x_0$.
Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion, die das Intervall $[a, b]$ in sich abbildet, mindestens einen Fixpunkt hat.

3.) Eine lineare Funktion $y(x) = kx + b$ heißt Asymptote einer Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$ (analog $x \to -\infty$), wenn $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ gilt.

a) Stellen Sie Bedingungen auf, unter denen $f(x)$ eine Asymptote besitzt und leiten Sie Formeln zur Berechnung von k und b her!

b) Ermitteln Sie die Asymptoten für $x \to \infty$ von

$$f_1(x) = \sqrt{Ax^2 + Bx + C} \qquad (A > 0) \quad \text{und}$$

$$f_2(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{Dx + E} \qquad (D \neq 0)$$

4.) Untersuchen Sie die angegebenen Funktionen in den jeweiligen Gebieten auf gleichmäßige Stetigkeit ($\epsilon - \delta -$ Technik)

a*) $f(x) = x^2$ in $\mathbb{R}$

b*) $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0, \infty[$

c) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $[0, 1[$

5.) Sei f eine stetige Funktion auf einer offenen Menge D und $x_0 \in D$.
Zeigen Sie, dass aus $f(x_0) > 0$ die Existenz einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ folgt mit $f(x) > 0 \ \ \forall x \in U_\delta(x_0)$.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 11.12 bis 15.12.2006 abzugeben.