Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

5. Übungsserie

1.*) Es sei $x_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)/2} & n = 2k-1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n/2} & n = 2k \end{cases}$

Berechnen Sie lim inf und lim sup für die Folgen $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ und $\sqrt[n]{x_n}$.

2.*) Man nennt eine Folge (x_n) von beschränkter Schwankung, wenn es eine Zahl C gibt, so dass für alle $n \in I\!N$ gilt

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C$$

Beweisen Sie, dass Folgen von beschränkter Schwankung konvergent sind und geben Sie ein Beispiel an, dass die Umkehrung nicht gilt.

3.) Zeigen Sie, dass

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

eine konvergente Folge ist.
Hinweis: Verwenden Sie aus der Schule bekannte Tatsachen für die Logarithmus-Funktion.

4.) Berechnen Sie

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

Hinweis: Überzeugen Sie sich von der Konvergenz dieser Reihe gegen eine Zahl s und stellen Sie den Ausdruck $s - \dfrac{s}{2}$ dar.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $|q| < 1$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 20.11 bis 24.11.2006 abzugeben.