Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

4. Übungsserie

1.) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Zeigen Sie, dass dann

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$

c) $\lim_{n\to\infty} (1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e \qquad (\varepsilon_n \neq 0)$.

2.*) Es sei $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ u.s.w.
Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

3.) Man untersuche die Zahlenfolgen (x_n) die rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \text{mit} \quad x_0 = \pi \ , \quad a > 0$$

definiert ist, auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

4.*) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes ($\varepsilon - n_0-$Technik), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{n+1} = 5 \ .$$

5.) Berechnen Sie

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \qquad a > 0$,

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n!}$,

d) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{7}{n}\right)^n$.

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 13.11 bis 17.11.2006 abzugeben.