Übungen zur Vorlesung Analysis 1 WS 06/07

3. Übungsserie

1.) Es seien (a_n) und (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Zeigen Sie, dass die Folge (c_n) mit $c_n = \max(a_n, b_n)$ ebenfalls konvergent ist und dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \max(a, b)$ gilt.

Hinweis: Drücken Sie das Maximum zweier Zahlen durch eine geschickte Kombination dieser Zahlen mit Hilfe des Betrages aus.

2.) Sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$) .
Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

3.) a*) Sei $a_n > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$.

b) Sei $a_n > 0$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, falls der Limes auf der rechten Seite existiert.

4.) Sind die angegebenen Folgen (a_n) konvergent?
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a*) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}$

b) $a_n = \dfrac{a^n}{1+a^n} (a \neq -1)$

c*) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$

d) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$

e*) $a_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$

f) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}$

Es wird empfohlen, alle mit * gekennzeichneten Aufgaben schriftlich zu bearbeiten und in den Übungen in der Woche vom 06.11 bis 10.11.2006 abzugeben.