Analysis I - Serie 02
FSU Jena - WS 06/07
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 15, 2007

Aufgabe 1

$$Induktionsanfang: n = 1: \ |a_1| \leq |a_1|$$

$$Induktionsannahme: \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$Induktionsschritt: \left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right| = \left|a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq |a_{n+1}| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq |a_{n+1}| + \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i| \quad \square$$

Aufgabe 2

$$Induktionsanfang: n = 1: \ 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$$

$$Induktionsannahme: \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

$$Induktionsschritt: \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = n \cdot (n+1)! + (n+1)! + (n+1)! - 1$$

$$= (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 \quad \square$$

Aufgabe 3

$$Induktionsanfang: n=1:\ \ 1\cdot 2=\frac{1}{4}(1^4+2\cdot 1^3+3\cdot 1^2+2\cdot 1)$$

$$Induktionsannahme: \sum_{i=1}^{n} i(i^2+1)=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+3n^2+2n)$$

$$Induktionsschritt: \sum_{i=1}^{n+1} i(i^2+1)=(n+1)\cdot\big((n+1)^2+1\big)+\sum_{i=1}^{n} i(i^2+1)$$

$$=(n+1)(n^2+2n+2)+\frac{1}{4}(n^4+2n^3+3n^2+2n)=\frac{1}{4}\left((n+1)^4+2(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)\right)$$

Aufgabe 4

$$Induktionsanfang: n=1:\ \ 2\leq 2^{2^1}=4$$

$$Induktionsannahme: p_n\leq 2^{2^{n-1}}$$

$$Induktionsschritt: \forall\ n>1\in\mathbb{N}:\exists\ p\in\mathbb{P}:n<p<2n\ (Bertrand'sche\ Vermutung)$$

$$\Rightarrow p_{n+1}<2p_n\leq p_n^2\leq\left(2^{2^{n-1}}\right)^2=2^{2^n}\qquad\square$$

Aufgabe 5

$$Induktionsanfang: (x_1=1)\Rightarrow(x_1\geq 1)$$

$$Induktionsannahme: \left(\prod_{i=1}^{n} x_i=1\right)\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\geq n\right)$$

$$Induktionsschritt: Offensichtlich\ :\ \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i=1\right)\Rightarrow(\exists i,j\in\{1,...,n+1\}:x_i\geq 1\wedge x_j\leq 1)$$

$$O.B.d.A.\ sei\ x_n\leq 1\wedge x_{n+1}\geq 1.\ \Rightarrow x_{n+1}+x_n=(x_{n+1}-1)\cdot(1-x_n)+1+x_n\cdot x_{n+1}\geq 1+x_n\cdot x_{n+1}\quad Also:$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i=1\right)\Rightarrow\left((x_n\cdot x_{n+1})\cdot\prod_{i=1}^{n-1} x_i=1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x_n\cdot x_{n+1}+\sum_{i=1}^{n-1} x_i\geq n\right)\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\ =\ x_{n+1}+x_n+\sum_{i=1}^{n-1} x_i\ \geq\ x_n\cdot x_{n+1}+1+\sum_{i=1}^{n-1} x_i\geq n+1\right)\quad\square$$

Aufgabe 6

$$Induktionsanfang : (1 + x_1) \geq 1 + x_n$$

$$Induktionsannahme : \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$Induktionsschritt : \prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i) = (1 + x_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \;\geq\; (1 + x_{n+1}) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} + x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \;\geq\; 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i \quad da \quad x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0 \quad \square$$