Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

14. Serie (Abschnitte 3.1, 3.2.1)

Aufgabe 1 :

Untersuchen Sie, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar ist !

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ , x \le 1 \\ x^2 - 1 \ , x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , 0 < x < 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2} \ , & x \ge 1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & , 0 < x < 1 \\ -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4} \ , & x \ge 1 \end{cases}$

Aufgabe 2 :

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig fixiert. Geben Sie in Abhängigkeit von x_0 reelle Zahlen a und b an, so daß die Funktion $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & , & x \le x_0 \\ ax + b & , & x > x_0 \end{array} \right\}$ überall differenzierbar wird.

Aufgabe 3 :

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente

a) an die Parabel $y = 3x - x^2$ im Punkt $(1, 2)$, **b)** an die Ellipse $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$ im Punkt $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Aufgabe 4 :

Geben Sie für die folgenden Funktionen die natürlichen *Definitionsgebiete* an, untersuchen Sie die Funktionen auf *Differenzierbarkeit*, und berechnen Sie gegebenenfalls die *Ableitung* :

a) $e^{x^3 \cos x}$, **b)** $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$, **c)** $\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$.

d) $\cos^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, **e)** x^{2x}, **h)** $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}))$,

g) $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$, **f)** $2^{\sin \frac{1}{x}}$, **i)** $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}))$.

Aufgabe 5 :

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beweise man folgende Aussagen :

a) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$, **b)** $\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$ für $x > 0$

c) Das Polynom $p(x) = ax^3 - 3ax + b$ hat für $0 < a \le 1$, $b \in \mathbb{R}$, in $[-a, a]$ höchstens eine Nullstelle.

Aufgabe 6 :

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b). Es sei $x_0 \in (a, b)$ und f in jedem Punkt $x \neq x_0$ differenzierbar. Außerdem sei

$$\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) =: c.$$

Man zeige, daß dann f in x_0 differenzierbar ist, und $f'(x_0) = c$ ist.

Aufgabe 7 :

Wie oft sind die folgenden Funktionen differenzierbar?

a) $f(x) = \begin{cases} x^{n+1} \ , & x \ge 0 \\ 0 \ , & x < 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} \ , & x > 0 \\ 0 \ , & x \le 0 \end{cases}$, c) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/1-x^2} \ , & |x| < 1 \\ 0 \ , & |x| \ge 1 \end{cases}$