Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung

Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

13. Serie (Abschnitt 2.3.1 - 2.3.4)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 29. 01. bis 03. 02. 2007

Aufgabe 1 : Man finde Funktionen $f: [0,1) \to \mathbb{R}$ und $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die stetig und beschränkt sind, jedoch kein Maximum besitzen.

Aufgabe 2 : Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und positiv (d.h. $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$). Man zeige, dass dann ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $f(x) > \alpha$ für alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 3 : Behandeln Sie die folgenden Probleme mit Hilfe des *Zwischenwertsatzes* :

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-a} + \dfrac{x^6+1}{x-b}$, $x \in (a,b)$, mindestens eine Nullstelle in (a,b) hat.

b) Für eine in (a,b) stetige Funktion f gibt es zu vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ aus (a,b) stets ein $\xi \in (a,b)$ mit $nf(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

c), 3P Es sei f stetig auf $[0,1]$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{3}$, und es gelte stets $f(x) \in \mathbb{Q}$.
Berechnen Sie den Wert $f(\frac{\sqrt{3}}{7})$.

Aufgabe 4 : Zeigen Sie, dass es zu jeder Zeit zwei entgegengesetzte Punkte auf dem Erdäquator gibt, die die gleiche Temperatur haben.
Hinweis: Die Temperaturverteilung wird als stetig angenommen.

Aufgabe 5 : Es sei $f: [a,b] \to [a,b]$, und es existiere ein $q < 1$, so dass $|f(x) - f(y)| < q|x-y|$ für alle $x,\ y \in [a,b]$ ist. Es sei die Folge $(x_n)_n$, definiert durch $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, bei beliebigem $x_0 \in [a,b]$.
a) Man zeige, dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge ist.
b) Man zeige, dass $(x_n)_n$ gegen ein $x^* \in [a,b]$ konvergiert, und beweise die Fehlerabschätzung

$$|x^* - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \quad (n \in \mathbb{N})$$

c) Man zeige, dass x^* der einzige Fixpunkt von f ist.

Aufgabe 6 : Es sei $f(x) := x + \operatorname{sgn} x$ für $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie f und f^{-1} auf Monotonie und Stetigkeit.

Aufgabe 7 : Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen streng monoton sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweilige Umkehrfunktion.

a), 2P $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,0]$ **b), 3P** $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8 : Man bestimme alle stetigen Funktionen, die folgenden Gleichungen genügen:

a), 2P $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$

b), 2P $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, mit $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$ für alle $x,\ y \in (0,\infty)$

c), 2P $h: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, mit $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$ für alle $x,\ y \in (0,\infty)$

Hinweis: Man führe c) auf b) sowie b) und a) auf Aufgabe 4 (12. Serie) zurück.

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.