Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung

Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

12. Serie (Abschnitt 2.2.3)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 22. 01. bis 26. 01. 2007

Aufgabe 1, 4P :

Mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$ - Definition zeige man die Stetigkeit der Funktion $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ in den Punkten $x = -1$ und $x = 3$.

Aufgabe 2 : Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$. Die Funktionen f_+ und f_- sind definiert als:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{falls } f(x) > 0 \end{cases} .$$

Man zeige:

a), 1P Es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

b), 2P f_+ und f_- sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 : Man zeige: Sind f und g zwei auf ganz $\mathbb{R}$ definierte stetige Funktionen und gilt $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, so ist sogar $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 : Man bestimme alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Gleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ genügen.

Aufgabe 5 : Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, periodisch und nicht konstant. Man zeige: Dann besitzt f eine kleinste positive Periode p und alle anderen Perioden sind ganzzahlige Vielfache von p.

Aufgabe 6 : Für die angegebenen Funktionenfolgen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ berechne man $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Sind die Grenzfunktionen f in den angegebenen Intervallen D stetig?

a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $D = [0,2]$

b), 2P $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$, $D = [0,2]$

c) $f_n(x) = [x(1-x)]^n$, $D = [0,1]$

d), 1P $f_n(x) = \dfrac{x^n - n}{x^n + n}$, $D = [0,2]$

Aufgabe 7 : Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig auf D, falls eine positive Zahl $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle x und y aus D gilt. Man zeige:

a), 1P Die Funktion $f(x) = x^2$ ist Lipschitz-stetig auf $[-1, 1]$.

b), 1P Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist Lipschitz-stetig auf $[1, \infty]$.

c), 1P Die Funktion $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$.

d), 2P Sind f und g Lipschitz-stetig und beschränkt auf D, so sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ Lipschitz-stetig auf D.

Aufgabe 8 :

a) Man zeige: Ist die Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ monoton wachsend und stetig, so konvergiert die Folge $(x_n)_n$, definiert durch $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, bei beliebigem $x_0 \in [a,b]$. Für den Grenzwert x^* gilt $f(x^*) = x^*$ (d.h. x^* ist ein Fixpunkt von f).

b) Man betrachte als Beispiel die Funktion $f(x) = 5(1 - e^{-x})$ auf dem Intervall $[0, 5]$.

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.