Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

11. Serie (Abschnitte 2.2.1, 2.2.2)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 15. 01. bis 19. 01. 2007

Aufgabe 1 :

a) Eine Funktion $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert : $f\left(\frac{1}{2n}\right) := 1$, $f\left(\frac{1}{2n-1}\right) := 0$, $n \in \mathbb{N}$, und auf jedem Intervall $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ seien die Funktionswerte an den Intervallenden durch eine gerade Linie verbunden. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, und zeigen Sie, daß der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert.

b) Es sei $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$. Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}, \quad (b \neq 0)$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x-4}\left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{11}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1000}\, e^{-\sqrt{x}}$

d), 2P $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

e), 2P $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^{10} + 10^{10}\right)^{-1} \sum\limits_{k=0}^{1000} (x+k)^{10}$

f), 2P $\lim\limits_{x\to 0+} \left(2 + x\sqrt{1 + \dfrac{4}{x^2}}\right)$

g), 2P $\lim\limits_{x\to 0-} \left(2 + x\sqrt{1 + \dfrac{4}{x^2}}\right)$

h), 2P $\lim\limits_{x\to 0} x(1 + \exp(1/x))^{-1}$

Aufgabe 3, 2P : Wie müssen die Konstanten a und b gewählt werden, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x\,, & x \le -\pi/2 \\ a\sin x + b\,, & |x| < \pi/2 \\ \cos x\,, & x \ge \pi/2 \end{cases}$$

überall stetig wird?

Aufgabe 4 :

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} & x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1} & x \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ **c)** $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$

d) $f(x) = x - [x]$, wobei $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} :\ k \le x\}$.

Aufgabe 5 :

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}\,, & 0 < x \le 1 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ auf Stetigkeit.

Skizzieren Sie den Gaphen der Funktion f.

Aufgabe 6 :

Es sei f eine auf einem Intervall I stetige Funktion, und f nehme nur endlich viele Werte an. Man zeige, dass dann f konstant ist.

Die mit $\square$ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.