

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

10. Serie (Abschnitte 2.1.6, 2.2.1)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 8. 01. bis 12. 01. 2007

Aufgabe 1 :

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die Funktionen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus durch:

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

a) Man zeige:

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad \sinh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \sinh z_2 + \sinh z_1 \cosh z_2$$

b) Man skizziere die Graphen der Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:

a), 2P Man zeige: Für alle $x < 0$ gilt: $e^x < \frac{1}{1-x}$.

b), 1P Man stelle e^{-x^2} für alle $x \in \mathbb{R}$ als Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dar.

c), 3P Man stelle $\frac{1}{x^2+1}$ und $\frac{1}{(x+1)^2}$ für alle $x \in (0, 1)$ als Potenzreihe dar.

d), 1P Man zeige: Für alle $x \in (0, 2)$ gilt $\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$.

Aufgabe 3: Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

a), 3P $f(x) = |x-1| + |x+1| - 2$ ($x \in \mathbb{R}$) b) $f(x) = x + |x|$ ($x \in \mathbb{R}$)

c), 1P $f(x) = x + 1/x$ ($x \neq 0$) d) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ($x \neq 1$) e) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ($|x| \neq 1$)

g), 2P $f(x) = 4 \sin(2x - 7)$ ($x \in \mathbb{R}$) h) $f(x) = |\sin(-3x)|$ ($x \in \mathbb{R}$).

Welche der Funktionen sind gerade bzw. ungerade?

Aufgabe 4:

a) Für $f(x) = x^3 - x$ und $g(x) = \sin 2x$ berechne man:

$$f(f(x)), g(f(2)), f(g(x)), f(g(\pi/12)), g(g(x)), g(\pi f(32815)).$$

b) Für $f(x) = e^x$ und $f(x) = 1/x$ berechne man:

$$|f(x)|, f(|x|), f(x^2), [f(x)]^2, f(1/x) \text{ und } 1/f(x).$$

Man skizziere die jeweiligen Graphen der so erzeugten Funktionen.

Aufgabe 5: Es sei $\psi(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq 1 \\ 3 - 2|x| & , 1 < |x| \leq 3/2 \\ 0 & , |x| > 3/2 \end{cases}$

a), 3P Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $\psi(x)$, $3\psi(3x)$ und $\psi(x - 5/2)$.

b), 2P Berechnen Sie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(x - 5k/2)$.

c), 4P Es sei $\varphi(x) := \psi(x) - \psi(2x)$ ($x \in \mathbb{R}$) und $\varphi_j(x) := \varphi(2^{-j}x)$ ($j \in \mathbb{N}$).

Skizzieren Sie den Graphen von φ . Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_j(x) > 0$?

Berechnen Sie $\psi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)$.

Aufgabe 6: Es sei $f(x) = \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right) \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.

Man gebe ein $\delta > 0$ an, so dass für alle x mit $|x-1| < \delta$ gilt: $|f(x) - \frac{1}{32}| < \frac{1}{100}$.

Die mit \square gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.