Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

9. Serie (Abschnitte 2.1.2 - 2.1.5)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 18. 12. bis 22. 12. 2006

Aufgabe 1 : (entspricht Aufgabe 6 e), f) der 8. Serie)

a, 2P Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen und es existiere $\lim_{k\to\infty} c_k$. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ absolut konvergent ist.

b, 2P Man finde $(a_k)_k$ und $(c_k)_k$, so dass $\lim_{k\to\infty} c_k$ existiert, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ divergent ist.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz/Divergenz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$ **b), 2P** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,5^n}{2^n\,3^{n+1}}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n - 2n^n}$ **d), 2P** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$ g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^k}$, $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 3:

Untersuchen Sie die folgenden alternierenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$ **c), 2P** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$

Aufgabe 4 :

Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

a) $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$ **b), 2P** $\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

Aufgabe 5 :

Konstruieren Sie eine Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, die divergiert.

Aufgabe 6 : a) Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} x^k$?

b) Man zeige, daas für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}\, x^k$ konvergiert.

Aufgabe 7 :

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $a_k := b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Ferner sei $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$. Man zeige, dass die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, aber ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ nicht konvergiert.

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.