Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

8. Serie (Abschnitte 1.2.3, 2.1.1)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 11. 12. bis 15. 12. 2006

Aufgabe 1 : Beweisen Sie:

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x \quad .$$

Unter Verwendung dieser Formel zeige man, dass $\cos \pi/3 = 1/2$ ist.

Aufgabe 2 : Man gebe die Polar- und Normaldarstellung folgender komplexer Zahlen an:

a) $(1-i)^6$ b) $(i-\sqrt{3})^8$ c) $(\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}})^3$ **d), 2p** $(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^6$

Aufgabe 3, 3P : Es seien w_k $(k = 0, \dots, n-1)$ die n-ten Einheitswurzeln. Man zeige, dass $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$ gilt.

Aufgabe 4 : Bestimmen Sie die Summe der folgenden Reihen.

a), 2P $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$

b), 3P Man berechne die Summe s der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$. Für welche n ist $|s-s_n| < 10^{-4}$?

Aufgabe 5 : Sind die unendlichen Reihen

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{k^2}\right)$ und b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{(-1)^k}{k}\right)$

konvergent oder divergent?

Aufgabe 6 : Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (x_n) konvergiert.

b) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert und $x_n \geq 0$ gilt, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

c) Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert und $x_n \geq 0$ ist, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{x_n x_{n+1}}$

d) Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert und $x_n \geq 0$ ist, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sqrt{x_n}$.

e), 2P Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen und es existiere $\lim_{k\to\infty} c_k$. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ absolut konvergent ist.

f), 2P Man finde $(a_k)_k$ und $(c_k)_k$, so dass $\lim_{k\to\infty} c_k$ existiert, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ divergent ist.

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.