Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

7. Serie (Abschnitte 1.2.2, 1.2.3)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 4. 12. bis 8. 12. 2006

Aufgabe 1 :

Skizzieren Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene :

a) $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| - \overline{z} = 1 + 2i\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - 1 + i| = |z - 3 - 5i|\}$

c) $\left\{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \le 2\right\}$

d), 2P $\left\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le 1\,,\, \left|z - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}\right\}$

e) $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - 1 - i| = 2|z + 1 + i|\}$

f), 2P $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > 1 - \operatorname{Re} z\}$.

Aufgabe 2, 3P :

Es seien z_1, z_2 und z_3 komplexe Zahlen mit $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ und $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Man zeige, dass z_1, z_2 und z_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks in der komplexen Ebene sind.

Aufgabe 3 :

Beweisen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die sogenannte Parallelogramm–Gleichung

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

gilt. Welcher geometrische Satz verbirgt sich dahinter?

Aufgabe 4 :

Bringen Sie die folgenden Ausdrücke auf trigonometrische Form $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

a) $(1 + \sqrt{3}i)(1 + i)(\cos a + i\sin a), \quad a \in \mathbb{R}$ **b)** -5 **c)** $i + \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha), \quad 0 \le \alpha < \pi$

Aufgabe 5 :

Berechnen Sie folgende Potenzen komplexer Zahlen :

a), 2P $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{12}$ **b)** $(1 + i)^{4711}$

Aufgabe 6 :

Lösen Sie die Gleichungen für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$:

a) $z^3 = i$ **b)** $z^6 = -27$ **c)** $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ **d)** $z^2 + 2 = 0$

e), 2P $z^2 + 2z + (1 - 8i) = 0$ **f), 3P** $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$ **g)** $z^2 = 3 + 4i$ **h)** $z^2 = 5 - 12i$

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.