Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

6. Serie (Abschnitte 1.1.3 + 1.2.1)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 27. 11. bis 1. 12. 2006

Aufgabe 1 : Bestimmen Sie die Grenzwerte der angegebenen Folgen für $n \longrightarrow \infty$.

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)! - n!}$ $\boxed{\textbf{b), 2P}}$ $n^2\left[\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^5 - \left(1+\dfrac{5}{n}\right)^3\right]$ **c)** $\dfrac{(-1)^n\, n}{2n^2+5}$

$\boxed{\textbf{d), 1 P}}$ $\dfrac{n!}{n^n}$ $\boxed{\textbf{e), 2P}}$ $\sqrt{(n+a)(n+b)} - n, \quad a, b > 0$

Aufgabe 2 :

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} (1 - \dfrac{1}{k^2})^k$. (Hinweis: Bernoullische Ungleichung)

b) Ist die Folge $(a_k)_k$, gegeben durch $a_1 = 1$, $a_{k+1} = a_k + \dfrac{1}{a_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ monoton und beschränkt?

c) Es sei $|a_k - a_{k+1}| < 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $(a_k)_k$ eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 3 : Man zeige: Für eine konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert auch die Folge ihrer arithmetischen Mittel

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$$

und besitzt den gleichen Grenzwert. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrung dieser Aussage falsch ist.

Aufgabe 4 : Es sei $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k}, \qquad n \in \mathbb{N}$. Man zeige $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$.

Hinweis: Verwenden Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}\, n^3 + \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{6}\, n$.

Aufgabe 5 : Für komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 beweise man:

$\boxed{\textbf{a), 3P}}$ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

$\boxed{\textbf{b), 2P}}$ $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (Distributivgesetz)

Aufgabe 6 : Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen :

a) $\left(-\sqrt{5} + i\sqrt{5}\right)^3 (1+i)^2$ b) $\dfrac{(-1+4i)^2}{5-2i}$ c) $\left(\dfrac{4-i}{2+i}\right)^2$

$\boxed{\textbf{d), 2P}}$ $\dfrac{125}{(2+i)^3} + (1+i)^8 - 7i$ e) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^3 \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^3$

Die mit $\square$ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.