Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

5. Serie (Abschnitt 1.1.3)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 20. 11. bis 24. 11. 2006

Aufgabe 1 : Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Aus $a_n \longrightarrow \infty$ folgt $\dfrac{1}{a_n} \longrightarrow 0$.

b) Aus $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$ folgt $|a_n| \longrightarrow |a|$.

c) Aus $a_n \geq 0$ und $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$ folgt $a \geq 0$ und $\sqrt{a_n} \longrightarrow \sqrt{a}$.

d) Aus $a_n \to a \in \mathbb{R}$ und $b_n \to b \in \mathbb{R}$ folgt $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}$ und $\min\{a_n, b_n\} \to \min\{a, b\}$.

Aufgabe 2 : Man finde Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, so dass:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = c \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben ist.

d) $(a_n b_n)_n$ beschränkt, jedoch nicht konvergent ist.

Aufgabe 3, je 1P : Man finde $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$:

a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 10^{-6}$

b) $\sqrt[n]{17} - 1 < 10^{-6}$

c) $\sqrt[n]{n} - 1 < 10^{-6}$

Hinweis: Man verwende die Ergebnisse aus der Vorlesung bzw Aufgabe 1, 3. Serie.

Aufgabe 4 : Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,\right)$

c), 2P $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right)$

d), 2P $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\,\right)$

Aufgabe 5 : Man untersuche die Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwerte.

a) $a_n := \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

b) $a_1 > 0$, $a_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$

c), 3P $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{a_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 6 :

a) Man zeige: Eine Folge positiver reeller Zahlen $(a_n)_n$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ existiert, ist stets eine Nullfolge.

b) Ist die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n := \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} \cdots + \dfrac{1}{2n}$ monoton? Ist sie konvergent?

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.