Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

4. Serie (Abschnitt 1.1.2)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 13. 11. bis 17. 11. 2006

Aufgabe 1 : Man untersuche folgende Mengen auf die Existenz von Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum.

a) $M = \left\{ \frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{N}, 0 < m < n \right\}$, b) $M = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$,

c) $M = \left\{ \frac{(-1)^m}{n} - \frac{(-1)^n}{m} : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$, **d), 4P** $M = \left\{ \frac{m-n}{m+n} : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$,

e) $M = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : \ x \in \mathbb{R} \right\}$, f) $M = \left\{ \frac{x}{1+x} : \ x \in \mathbb{R}, \, x > -1 \right\}$,

g) $M = \left\{ x + \frac{1}{x} : \ x \in \mathbb{R}, \, \frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$, **h), 2P** $M = \{x : \ x, y \in \mathbb{R}, \ x^2 + 2x + y^2 + 1 < 4\}$,

Aufgabe 2 : Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge, die kein Maximum besitzt. Es sei $\alpha := \sup A$. Man zeige, dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A existiert mit:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots a_n < \ldots \qquad \text{und} \qquad \alpha - 1/n < a_n < \alpha \, .$$

Aufgabe 3, 2P : Man zeige: Für alle reellen Zahlen x, y gilt:

a) $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, b) $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Aufgabe 4 : Es seien A, B nichtleere Mengen reeller Zahlen , und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir setzen:

$A \pm B := \{a \pm b : \ a \in A, \, b \in B\}$, $A \cdot C := \{a \cdot b : \ a \in A, \, b \in B\}$, $\frac{1}{A} := \{1/a : \ a \in A\}$ (falls $0 \notin A$), $A \leq B :\Longleftrightarrow \ \forall a \in A \ \forall b \in B \ : \ a \leq b$. Man zeige:

(1) $A \leq B \Longrightarrow \sup A \leq \inf B$,

(2) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ und $\sup(A - B) = \sup a - \inf B$,

(3) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ falls $A, \, B \subset [0, \infty)$
$\sup(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ falls $A, \, B \subset (-\infty, 0]$,

(4) $\sup \frac{1}{A} = \frac{1}{\inf A}$, falls $\inf A > 0$.

(5) Wie lauten die entsprechenden Aussagen für das Infimum?

Aufgabe 5, 4P : Es seien $A = \{a_1, \, a_2, \, \ldots\}$ und $B = \{b_1, \, b_2, \, \ldots\}$ nach oben beschränkte Mengen nichtnegativer reeller Zahlen. Man zeige:

(1) $\sup\{a_n \cdot b_n : \ n \in \mathbb{N}\} \leq \ \sup A \cdot \sup B$,

(2) $\sup\{a_n + b_n : \ n \in \mathbb{N}\} \leq \ \sup A + \sup B$

und gebe jeweils ein Beispiel an, so dass in (1) bzw (2) tatsächlich "$<$" gilt.

Die mit □ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.