Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung
Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

3. Serie (Kapitel 1.1)

Abgabe der Lösungen in der Woche vom 6. 11. bis 10. 11. 2006

Aufgabe 1 :

a) Man beweise die sogenannte Bernoulli'sche Ungleichung:

$$\forall\, x \geq -1\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\quad (1+x)^n \geq 1 + nx\ .$$

b) Man zeige:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,(n \geq 1)\ \forall\, a \geq 1\ :\quad 0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}\ .$$

Hinweis: Man verwende a) mit $\sqrt[n]{a} = 1 + x$.

Aufgabe 2 :

a) Man zeige:

$$\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$$

für alle reellen Zahlen r, s mit $0 \leq r < s$.

b) Man zeige:

$$\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

für alle reellen Zahlen x, y .

Aufgabe 3 : Man zeige, daß für alle $\varepsilon > 0$ und für alle a, $b \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

$$2|ab| \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} b^2 \quad \text{und} \quad (a+b)^2 \leq (1+\varepsilon^2)a^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon^2})b^2$$

gelten.

Hinweis: Man betrachte $\left(\varepsilon a - \dfrac{b}{\varepsilon}\right)^2$.

$\boxed{\textbf{Aufgabe 4, 4P}}$ **:** Man zeige, dass für alle x, $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\ ,\quad \frac{x^4+y^4}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^4\ ,\quad \frac{x^8+y^8}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^8 \ \text{usw.}$$

gilt.

Aufgabe 5 : Man zeige

$$\boxed{\text{a), 2P}}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < 1 \qquad \boxed{\text{b), 2P}}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2\ .$$

Hinweis: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

Die mit $\square$ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.