Übungen zur Vorlesung

Analysis 1 (Lehramt-Gymnasium)

1. Serie (Kapitel 1.1)

Abgabe der Lösungen in den Übungen der Woche vom 23.10. bis 27.10.2006

Aufgabe 1 :

a) Man zeige: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n > n$ und $3^n > n^2$.

b) Man zeige: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n! > 3^n$?

Aufgabe 2, 5 P :

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n > n^3$?

b) Man zeige: Für $n = 2, 3, \ldots$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

Aufgabe 3 : Man beweise:

a) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

b) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

c) Die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen ist nicht abzählbar.

Aufgabe 4, 3 P : Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{3}} \left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right] \in \mathbb{N}$.

Hinweis : Binomischer Satz

Aufgabe 5 : Durch indirekten Beweis zeige man:

a) $\sqrt{3}$, $\frac{1+3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$, $\log_2 6$ sind irrational.

b) Für jede Primzahl p ist $\sqrt{p}$ irrational.

Aufgabe 6, 5 P : Man beweise die beiden folgenden Aussagen.

a) Sind $b,\, d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so gilt: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

b) $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

Aufgabe 7 : Welche Aussagen sind richtig für beliebige reelle Zahlen $a,\, b,\, c,\, d$?

(i) $a > b > c > 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 > ab > b^2 > c^2$

(ii) $ab > cd \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{d} > \frac{c}{b} \quad (b,\, d \neq 0)$

(iii) $(a > b) \wedge (c > d) \quad \Rightarrow \quad a - c > b - d$

Aufgabe 8, 2 : Es sei $M \subset \mathbb{R}$, und es sei a eine reelle Zahl. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) In jedem Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ liegen unendlich viele Elemente von M.

(2) In jedem Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ liegt mindestens ein von a verschiedenes Element von M.

Die mit $\square$ gekennzeichneten Aufgaben sind schriftlich anzufertigen.