Analysis I

FSU Jena - WS 06/07
Vorlesungsscript

Stilianos Louca

9. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um persönliche Notizen zur Einführung in die Analysis. Das Skript basiert hauptsächlich auf dem, im WS 06/07 an der FSU Jena von Prof. Bernd Carl gelehrten, Stoff.

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird! Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Elemente der Logik und Mengenlehre

2.1 Grundbegriffe der Aussagenlogik

2.1.1 Definition: Aussage

Unter einer *Aussage* p versteht man einen Satz, der die Eigenschaft hat *Wahr* (W) oder *Falsch* (F) zu sein.
Beispiele:

- "1 ist eine positive Zahl" ist eine wahre Aussage.
- "Ja" ist keine Aussage.

Sind p und q Aussagen, so lassen sich durch folgende Aussageverbindungen neue Aussagen gewinnen:

- **Negation:** $\overline{p}$ oder $\neg p$: *nicht* p. Es gilt:
$$\overline{p} \equiv W \;\Leftrightarrow\; p \equiv F$$
bzw.
$$\neg\neg p \equiv p$$
- **Konjunktion:** $p \wedge q$: p *und* q. Es gilt:
$$p \wedge q \equiv W \;:\Leftrightarrow\; p \equiv W \;\wedge\; q \equiv W$$
- **Disjunktion:** $p \vee q$: p *oder* q. Es gilt:
$$p \vee q \equiv W \;:\Leftrightarrow\; (p \equiv W) \;\vee (q \equiv W)$$

2.1.2 Definition: Implikation & Äquivalenz

Für zwei Aussagen p und q schreibt man $p \Rightarrow q$ falls aus p die Aussage q folgt. Man sagt p *impliziert* q, oder *wenn* p *so* q. Die Verknüpfung $p \Rightarrow q$ ist wieder eine Aussage, und es gilt

$$(p \Rightarrow q) \equiv F \;\Leftrightarrow\; (p \equiv W) \wedge \;(q \equiv F)$$

Man schreibt $p \Leftrightarrow q$ falls $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$. Man sagt q *gilt genau dann wenn* p *gilt*, oder p *ist äquivalent zu* q. Es gilt

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv W \;\Leftrightarrow\; p \equiv q$$

2.1.3 Rechenregeln

Für Aussagen p und q gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned}
&\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \\
&\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \;\overline{q} \\
&(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}) \\
&(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)
\end{aligned}$$

2.2 Grundlagen der Quantorenlogik

2.2.1 Definition: Aussageform

Unter einer *Aussageform* $p(x_1, x_2, \dots)$ verstehen wir einen Satz, in dem eine oder mehrere Variablen $x_1, x_2, \dots$ auftreten. Sie besitzt die Eigenschaft, dass man jedes mahl eine Aussage erhält, wenn für die Variablen Objekte oder Elemente einer irgendwie festliegenden Gesamtheit eingesetzt werden.
Beispiel: $p(x, y) =$ "$y = x + 2$"

2.2.2 Definition: Quantifizierung von Aussageformen

Durch folgende sprachliche Gebilde wird eine Aussageform p quantifiziert:

- $\forall\ x$: *für alle x, für beliebiges x, für jedes x*
- $\exists\ x$: *es existiert ein x, es gibt mindestens ein x*

Die Objekte $\forall$, $\exists$ nennt man *Quantoren*, und machen aus einer Aussageform $p(x)$ eine Aussage:

- $\forall\ x\ :\ p(x)$. Für jedes x gilt $p(x)$.
- $\exists\ x\ :\ p(x)$. Es gibt ein x, für das $p(x)$ gilt.

Beispiele

- Beginnend mit zwei Aussageformen $p(x)$ und $q(x)$ ist
$$\forall\ x : (p(x) \Rightarrow q(x))$$
eine Aussage.
- Der Satz
$$\forall\ x : (p(x)\ \ \Rightarrow\ \ q(y))$$
ist eine Aussageform mit der Variablen y.
- Für Aussageformen $p(x,y)$ und $q(x)$ ist
$$\exists\ x : [\forall\ y : (p(x,y) \Rightarrow q(y))]$$
eine Aussage.

2.2.3 Rechenregeln

Für Aussageformen $p(x),\ q(x)$ gelten die Regeln:

$$\overline{\forall\ x : (p(x) \Rightarrow q(x))} \equiv \exists\ x : \Big(p(x) \wedge \overline{q(x)}\Big)$$
$$\overline{\exists\ x : (p(x) \wedge\ q(x))} \equiv \forall\ x : \Big(p(x)\ \ \Rightarrow\ \ \overline{q(x)}\Big)$$

2.3 Elemente der Mengenlehre

2.3.1 Grundbegriffe

Für eine Menge M schreibt man $a \in M$ falls a ein Element aus M ist und $x \notin M$ andernfalls. Ist $p(x)$ eine Aussageform über M, so ist
$$A := \{x \in M : p(x)\}$$
die Menge aller x aus M für die $p(x)$ gilt. Die leere Menge $\emptyset$ enthält kein Element, und ist unabhängig von M.
Dabei gilt:

$$\{x \in M : p(x)\} = M\ \ \Leftrightarrow\ \ \forall\ x : (x \in M\ \ \Rightarrow\ \ p(x))$$
$$\{x \in M : p(x)\} \neq \emptyset\ \ \Leftrightarrow\ \ \exists\ x : (x \in M\ \ \wedge\ \ p(x))$$

Beispiele:

$$\{x \in M : x = x\} = M$$
$$\{x \in M : x \neq x\} = \emptyset$$

Schreibweise: Für Menge M und Aussageform, schreibt man für "$\forall\ x : (x \in M\ \ \Rightarrow\ \ p(x))$" meistens "$\forall\ x \in M : p(x)$" oder $p(x)\ \forall\ x \in M$.

2.3.2 Operationen & Relationen zwischen Mengen

Für Mengen A, B schreibt man:

$$A \subseteq B \ :\Leftrightarrow\ \forall\, x \in A : x \in B \quad : \quad A \text{ Teilmenge von } B$$

$$A = B \ :\Leftrightarrow\ A \subset B \ \wedge\ B \subset A \quad : \quad A \text{ und } B \text{ sind gleich}$$

$$A \subsetneq B \ :\Leftrightarrow\ A \subseteq B \ \wedge\ A \neq B$$

Bemerkung: Oft schreibt man $\subset$ anstatt $\subseteq$.
Für Grundmenge M und $A, B \subset M$ definiert man ferner die Operationen:

$$\text{Vereinigung: } A \cup B := \{x \in M : x \in A \ \vee\ x \in B\}$$

$$\text{Schnitt: } A \cap B := \{x \in M : x \in A \ \wedge\ x \in B\}$$

$$\text{Differenz: } A \setminus B := \{x \in M : x \in A \ \wedge\ x \notin B\}$$

$$\text{Komplement: } A^c := M \setminus A = \{x \in M : x \notin A\}$$

2.3.3 Definition: Geordnetes Paar

Seien $a \in A$ und $b \in B$. Dann heißt

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

geordnetes Paar. Für $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$ gilt:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \ \Leftrightarrow\ a_1 = a_2 \ \wedge\ b_1 = b_2$$

2.3.4 Definition: Kartesisches Produkt

Für zwei Mengen A, B definiert man

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \ \wedge\ b \in B\}$$

2.4 Abbildungen (Funktionen)

2.4.1 Definition: Abbildung

Seien X, Y zwei nicht-leere Mengen. Eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ mit den Eigenschaften

$$\forall\, x \in X,\ \forall\, y_1, y_2 \in Y : (x, y_1) \in f \ \wedge\ (x, y_2) \in f \ \Rightarrow\ y_1 = y_2 \quad \text{(Eindeutigkeit)}$$

und

$$\forall\, x \in X : \exists\, y \in Y : (x, y) \in f$$

heißt *Abbildung* oder *Funktion* von X nach Y. Schreibweise:

$$f : X \to Y \ ,\ x \mapsto f(x)$$

Erläuterung: Unter einer Abbildung oder Funktion f von X in Y versteht man eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y = f(x)$ aus Y zuordnet. Dieses $f(x)$ nennt man den *Wert* oder *Bild* der Abbildung f im Punkt x. Aufgrund der Eindeutigkeit einer Abbildung f, ist diese durch die Angabe ihrer Werte in jedem Punkt $x \in X$ eindeutig bestimmt. Die Menge X heißt *Definitionsbereich* von f. Die Menge

$$f(X) := \{y \in Y : \exists\, x \in X : y = f(x)\}$$

nennt man den *Bildbereich* von f und

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

den *Graph* von f. Für Mengen $A \subset X, B \subset Y$ nennt man allgemein

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

das *Bild* von A bzgl. f und

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

das *Urbild* von B bzgl. f.

2.4.2 Definition: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, falls gilt:

$$\forall\ x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

Sie heißt *surjektiv* falls $f(X) = Y$, das heißt

$$\forall\ y \in Y : \exists\ x \in X : f(x) = y$$

f heißt *bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist. Man sagt: f ist einen *eineindeutige* Abbildung von X nach Y.

2.4.3 Definition: Einschränkung, Fortsetzung

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$. Die Abbildung $f\,|_A : A \to Y$, definiert durch

$$f\,|_A\,(x) := f(x) \text{ für } x \in A$$

heißt *Einschränkung* von f auf A, und f *Fortsetzung* von $f\,|_A$ auf X.

2.4.4 Definition: Identität

Sei X eine nicht-leere Menge. Man definiert die Identität $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_X$ auf X als die Abbildung definiert gemäß

$$\mathrm{Id}_X(x) = x \ \ \forall\ x \in X$$

2.5 Komposition oder Hintereinanderausführung von Abbildungen

2.5.1 Definition: $f \circ g$

Seien X, Y, Z nicht-leere Mengen und $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann heißt die Abbildung $g \circ f : X \to Z$, definiert gemäß

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \ \text{ für } \ x \in X$$

Komposition, *Hintereinanderausführung* oder *Verkettung* der Abbildungen f und g.

2.5.2 Definition: Inverse Abbildung

Seien X, Y zwei nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$. Dann heißt die Abbildung $g : Y \to X$:

- Zu f *linksinvers*, falls $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.
- Zu f *rechtsinvers*, falls $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.
- Zu f *invers*, falls g zu f links- und rechtsinvers ist. Man schreibt $g =: f^{-1}$.

Bemerke: Sind g_l und g_r jeweils links- und rechtsinvers zu f, so ist $g_l = g_r = f^{-1}$. Insbesondere folgt daraus dass f^{-1} (falls existent) eindeutig bestimmt ist.

2.5.3 Lemma über die Existenz von Inversen

Seien X, Y zwei nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$. Dann gilt:

(i) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f besitzt eine Rechtsinverse.

(ii) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f besitzt eine Linksinverse.

(iii) f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f besitzt eine Inverse.

Bemerke: Für diese Aussage wird das *Auswahlaxiom* vorausgesetzt.

3 Zahlen

3.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen werden charakterisiert durch drei Axiomengruppen:

- Körperaxiome
- Anordnungsaxiome
- Vollständigkeitsaxiom

Dabei unterscheidet man spezielle Gruppen von Zahlen:

- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, mit $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, als *Vervollständigung* von $\mathbb{Q}$.

3.1.1 Definition: Körper

Eine Menge $\mathbb{K}$, mit den Abbildungen $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt *Körper*, falls folgende Axiome erfüllt sind:

(1) Kommutativität in "+" : $a + b = b + a$

(2) Assoziativität in "+" : $a + (b + c) = (a + b) + c$

(3) Existenz eines neutralen Elementes $0 \in \mathbb{K}$ in "+" :

$$a + 0 = a \ \ \forall\, a \in \mathbb{K}$$

(4) Existenz eines Inversen in "+" :

$$\forall\, a \in \mathbb{K} : \exists\ -a \in \mathbb{K} : a + (-a) =: a - a = 0$$

(5) Kommutativität in "·" : $a \cdot b = b \cdot a$

(6) Assoziativität in "·" : $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(7) Existenz eines neutralen Elementes $1 \in \mathbb{K}$ in "·" :

$$a \cdot 1 = a \ \ \forall\, a \in \mathbb{K}$$

Dabei gelte $1 \neq 0$.

(8) Existenz eines Inversen in "·" für $a \neq 0$:

$$\forall\, a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \exists\ a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$$

(9) Rechts-Distributivität: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bemerkungen:

- Man schreibt oft ab an stelle von $a \cdot b$.
- Die Links-Distributivität $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ folgt aus den restlichen Axiomen.

Beispiel: Die Menge $\mathbb{R}$ ist ein Körper.

3.1.2 Anordnungsaxiome der reellen Zahlen

Definiert sei auf $\mathbb{R}$ die Beziehung "$<$" mit folgenden Eigenschaften:

(1) Entweder gilt $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$

(2) Transitivität: Für $a < b,\ b < c$ ist $a < c$

(3) Monotonie der Addition: Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

(4) Monotonie der Multiplikation: Aus $(a < b) \ \wedge \ (0 < c)$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$. Gilt $0 < a$ so heißt a *positiv*. Gilt $a < 0$, so heißt a *negativ*.

Man schreibt ferner:

- $a > b$ falls $b < a$ ist.
- $a \leq b \ :\Leftrightarrow \ (a < b) \ \vee \ a = b$ ist.
- $a \geq b \ :\Leftrightarrow \ b \leq a$

Für $a \leq b$ definiert man ferner die *Intervalle*

$$\begin{aligned}
&[a, b] := \{c \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
&[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
&(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
&(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
&[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
&(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
&(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
&(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}
\end{aligned}$$

3.1.3 Definition: Betrag einer reellen Zahl

Man definiert die Abbildung $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gemäß:

$$|a| := \begin{cases} a & : a \geq 0 \\ -a & : a < 0 \end{cases}$$

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a|$ *Betrag* (*Absolutbetrag*) von a. Alternativ formuliert, ist

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

Man nennt $|a - b|$ den *Abstand* der Zahlen a, b.

Beispiele: $|0| = 0$, $|3| = 3$, $|-26| = 26$.

3.1.4 Eigenschaften von $|\cdot|$

Für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|a| = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0$

(ii) Homogenität: $|ab| = |a| \cdot |b|$

(iii) Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$

(iv) $||a| - |b|| \leq |a + b|$

(v) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

3.1.5 Definition: Obere Schranke & untere Schranke

Eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ S \in \mathbb{R}: \ \forall\ x \in M : x \leq S$$

Die Zahl S heißt *obere Schranke* von M. Analog heißt M *nach unten beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\ S \in \mathbb{R}: \ \forall\ x \in M : x \geq S$$

Die Zahl S heißt *untere Schranke* von M.
Ist M sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so heißt M *beschränkt.* Trivialerweise gilt dann

$$\exists\ S \geq 0 : \forall\ x \in M : |x| \leq S$$

3.1.6 Definition: Supremum & Infimum

Eine Zahl S heißt *Supremum* (oder *kleinste obere Schranke*) der Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$:

- S ist obere Schranke von M, das heißt $\forall\ x \in M : x \leq S$
- Für jede obere Schranke S' von M gilt: $S \leq S'$

Eine Zahl I heißt *Infimum* (oder *größte untere Schranke*) der Menge M $:\Leftrightarrow$:

- I ist untere Schranke von M, das heißt $\forall\ x \in M : x \geq I$
- Für jede untere Schranke I' von M gilt: $I \geq I'$

Bezeichnung: $S = \sup M$, $I = \inf M$.

Bemerkungen:

- $\sup M$ und $\inf M$ sind eindeutig bestimmt.
- Gilt $S := \sup M \in M$, so schreibt man auch $\max M$ statt $\sup M$, und S heißt *Maximum* von M. Also:

$$S = \max M \ \ :\Leftrightarrow \ \ S = \sup M \ \wedge \ S \in M$$

- Gilt $I := \inf M \in M$, so schreibt man auch $\min M$ statt $\inf M$, und I heißt *Minimum* von M. Also:

$$I = \inf M \ \ :\Leftrightarrow \ \ I = \inf M \ \wedge \ I \in M$$

3.1.7 Vollständigkeitsaxiom

Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen, besitzt ein Supremum.

Bemerkungen:

- Über die Zugehörigkeit von $\sup M$ zur Menge M wird nichts ausgesagt.
- Das Vollständigkeitsaxiom ist z.B. für $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ <u>nicht</u> erfüllt, denn

$$\left\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\right\}$$

  ist zwar nach oben beschränkt, besitzt jedoch kein Supremum.

Beispiele:

$$\sup(1,2] = 2\ ,\ \inf(1,2] = 1$$

$$\inf \mathbb{N} = 1\ ,\ \sup\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$$

3.1.8 Satz: Charakterisierung von Supremum und Infimum

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Dann gilt für Zahlen $S, I \in \mathbb{R}$:

$S = \sup M \;\Leftrightarrow$

- S ist obere Schranke von M
- $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, x \in M : S - \varepsilon < x$

und $I = \inf M \;\Leftrightarrow$

- I ist untere Schranke von M
- $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, x \in M : I + \varepsilon > x$

3.2 Teilmengen von $\mathbb{R}$

3.2.1 Natürliche Zahlen und Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

- $1 \in M$
- $\forall\, n \in M : n + 1 \in M$

Dann folgt $M = \mathbb{N}$. Dieses so genannte *Prinzip der vollständigen Induktion* kann durch die Körperaxiome und Anordnungsaxiome bewiesen werden. Eine für *Induktionsbeweise* besonders gut geeignete Formulierung ist folgende:

> Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $p(n)$ erklärt. Es gelte:
>
> - $p(1) \equiv W$
> - $\forall\, n \in \mathbb{N} : p(n) \Rightarrow p(n+1)$
>
> Dann ist $p(n)$ wahr $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Der *Induktionsanfang* kann für eine beliebige Zahl $n_0 \in \mathbb{Z}$ gewählt werden:

> Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und für $n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$ sei eine Aussage $p(n)$ erklärt. Es gelte:
>
> - $p(n_0) \equiv W$
> - $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0 : p(n) \Rightarrow p(n+1)$
>
> Dann ist $p(n)$ wahr $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$.

Letztere allgemeinere Formulierung, kann auf das obige Prinzip durch den Ansatz $q(k) := p(n_0 + k - 1),\ k \in \mathbb{N}$ zurückgeführt werden.

Beispiel: Summenformel für die geometrische Reihe: Für $q \neq 1$ und $n \geq 0$ gilt:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\ ,\ q^0 := 1$$

Beweis: Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Gilt nun für bestimmtes n die Aussage, so folgt die Aussage auch für $n + 1$, denn:

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

3.2.2 Wohlordnungssatz

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$. Dann besitzt M ein Minimum.
Bemerkung: Der Wohlordnungssatz ist äquivalent zum Induktionsprinzip.

3.2.3 Definition: Folge, Partialsumme, Partialprodukt

Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$ heißt *Folge* (oder X-Folge). Man schreibt für $n \in \mathbb{N}$ an Stelle von $a(n)$ oft a_n, und identifiziert eine Folge mit deren *Indizierten* Bildern, gemäß

$$(a_n) \ , \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ (a_n)_{n=1}^{\infty} \ , \ (a_1, a_2, \dots) \ , \ (a_n) \subset X$$

Statt $\mathbb{N}$ kann auch $\mathbb{N}_0$ oder noch allgemeiner $(a_n)_{n\geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ betrachtet werden.
Sei $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reelle Zahlenfolge. Die Operationen $\sum$ und $\prod$ können Induktiv definiert werden:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \ , \ m \in \mathbb{Z} \ , \ n \geq m$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n \ , \ n > m \text{ (Schritt)} \quad , \quad \sum_{k=m}^{m} a_k := a_m \text{ (Anfang)}$$

Ähnlich:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n \ , \ m \in \mathbb{Z} \ , \ n \geq m$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \left[\prod_{k=m}^{n-1} a_k\right] \cdot a_n \ , \ n > m \text{ (Schritt)} \quad , \quad \prod_{k=m}^{m} a_k := a_m \text{ (Anfang)}$$

Bemerkung: Analog definiert man auch die Mengenoperationen $\bigcup, \bigcap$ auf Mengenfolge (A_n):

$$\bigcup_{i=m}^{n} A_i \quad , \quad \bigcap_{i=m}^{n} A_n$$

Dabei ist für eine Indexmenge I:

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x : \exists \ i \in I : x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x : x \in A_i \ \forall \ i \in I\}$$

3.2.4 Definition: Fakultät, ganzzahlige Potenz

Man definiert Induktiv die *Fakultät* einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gemäß:

$$\text{Anfang: } 0! := 1 \quad , \quad \text{Schritt: } n! := n \cdot (n-1)! \ , \ n > 0$$

Ähnlich definiert man die *Potenz* (ganzzahlig) a^n für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\text{Anfang: } a^0 := 1 \quad , \quad \text{Schritt: } a^n := a \cdot a^{n-1} \ , \ n > 0$$

3.2.5 Satz von Archimedes

$$\forall\, a \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} : n \geq a$$

3.2.6 Definition: Endliche & unendliche Menge

Eine Menge $A \neq \emptyset$ heißt

- *Endlich* $:\Leftrightarrow\ \exists\, n \in \mathbb{N} : \exists\, \varphi : \{1, ..., n\} \to A$ bijektiv.
- *Unendlich* $:\Leftrightarrow$ A ist nicht endlich.

Man definiert $\emptyset$ als endliche Menge.

3.2.7 Definition: Abzählbare & überabzählbare Menge

Eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ heißt:

- *Abzählbar* $:\Leftrightarrow\ \exists\, \varphi : \mathbb{N} \to A$ surjektiv.
- *Überabzählbar* $:\Leftrightarrow$ A ist nicht abzählbar.

Man definiert $\emptyset$ als abzählbar.

Beispiele:

- $\mathbb{N},\ \mathbb{Z}$ sind abzählbar.
- $\{1, 2\}$ ist abzählbar.
- Jede endliche Menge ist abzählbar.
- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (vgl. Satz 3.2.9).

3.2.8 Satz: Vereinigung abzählbarer Mengen

Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen A_n , $n \in \mathbb{N}$ ist wieder abzählbar:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{a \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a \in A_n\} \ : \text{abzählbar}$$

Folgerung: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.
Beweis: Die Mengen

$$A_n := \left\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{N}\right\},\ B_n := \left\{-\frac{k}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

sind per Konstruktion abzählbar, so dass auch

$$\mathbb{Q} = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$$

abzählbar ist.

3.2.9 Satz: Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> abzählbar.

3.2.10 Definition: Gleichmächtigkeit

Zwei Mengen X, Y heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : X \to Y$ gibt.

3.2.11 Satz: Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind gleichmächtig.

4 Konvergenz

4.1 Folgen

4.1.1 Definition: Konvergente Folge

Eine reelle Zahlenfolge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *konvergent in* $\mathbb{R}$, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon$ die Aussage $|a_n - a| \leq \varepsilon$ folgt. Mit anderen Worten: (a_n) ist konvergent $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; n \geq n_\varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - a| \leq \varepsilon$$

Man nennt (a_n) konvergent nach a und sagt (a_n) konvergiert gegen a. Eine nicht-konvergente Folge nennt man *divergent*.
Bemerke: Verwendet man "$<$" statt "$\leq$" so ändert dies nichts an der Definition.

4.1.2 Satz über den Grenzwert einer Folge

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a eindeutig bestimmt, und heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n).
Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;,\; a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \;,\; a_n \to a \;,\; (a_n) \to a$$

4.1.3 Geometrische Interpretation des Grenzwertes

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine gegen a konvergierende Folge, das heißt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; n \geq n_\varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - a| \leq \varepsilon$$

Dies bedeutet, dass für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$, ab einem gewissen (gegebenfalls von ε abhängigen) Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder im Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ um a liegen. Außerhalb des Intervalls liegen höchstens endlich viele Glieder der Folge. Man sagt: Im Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ liegen *fast alle* Glieder der Folge.

Beispiele:

- Die Folge $a_n := \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0.
- Die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen $e \approx 2.718281$.
- Die Folge $a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist konvergent gegen e.

4.1.4 Definition: Nullfolge

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt *Nullfolge*.

4.1.5 Definition: Monotone Folge

Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt

- *Monoton wachsend* $:\Leftrightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- *Streng monoton wachsend* $:\Leftrightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- *Monoton fallend* $:\Leftrightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- *Streng monoton fallend* $:\Leftrightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
- *Monoton* $:\Leftrightarrow$ (a_n) ist entweder monoton wachsend oder monoton fallend.
- *Streng monoton* $:\Leftrightarrow$ (a_n) ist entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

4.1.6 Definition: Teilfolge

Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge, $(a_n) \subset X$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung, das heißt $\forall\ n \in \mathbb{N} : \varphi(n) < \varphi(n+1)$. Dann heißt $\left(a_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert gemäß

$$a_{\varphi(k)} := a(\varphi(k))$$

Teilfolge von (a_n). Diese ist wiederum eine Folge in X. Schreibweise:

$$n_k := \varphi(k)\ ,\ (a_{n_k}) \subset (a_n)$$

4.1.7 Satz über Teilfolgen konvergenter Folgen

Eine reelle Zahlenfolge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ genau dann wenn jede Teilfolge von (a_n) gegen a konvergiert.
Bemerkung: Die Bedingung dass <u>alle</u> Teilfolgen gegen a konvergieren ist notwendig, denn z.B konvergiert die Folge

$$a_n := (-1)^n$$

nicht, obwohl ihre Teilfolge

$$a'_k := a_{2k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

konvergiert.

4.1.8 Definition: Beschränkte Folge

Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* falls ihr Bild beschränkt ist, das heißt

$$\exists\ M \geq 0 : \forall\ n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

4.1.9 Satz: Beschränktheit konvergenter Folgen

Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.

4.1.10 Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n),\ (b_n),\ (c_n) \subset \mathbb{R}$ konvergente Zahlenfolgen, und $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n\ ,\ b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n\ ,\ c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Dann gilt:

(1) Für Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$ falls $b_n \neq 0\ ,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

(7) $\exists\ m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\ \forall\ n \geq m \ \Rightarrow\ a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

(8) $\exists\ m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall\ n \geq m\ \wedge\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \ \Rightarrow\ c = \lim\limits_{c_n\to\infty} c_n = a$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für $a_n > 0$

(11) Ist $a_n > 0$ und existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

4.1.11 Die geometrische Folge

Betrachten die Folge $a_n := q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & : |q| < 1 \\ 1 & : q = 1 \\ \text{divergent} & : q = -1 \ \vee \ |q| > 1 \end{cases}$$

4.1.12 Definition: Bestimmte Divergenz (unbestimmte Konvergenz)

Eine reelle Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt:

- *Bestimmt divergent* oder *uneigentlich/unbestimmt konvergent gegen* $+\infty$ $:\Leftrightarrow$

  $$\forall\ M > 0 : \exists\ n_M : \forall\ n \geq n_M : a_n \geq M$$

  Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

- *Bestimmt divergent* oder *uneigentlich/unbestimmt konvergent gegen* $-\infty$ $:\Leftrightarrow$

  $$\forall\ M < 0 : \exists\ n_M : \forall\ n \geq n_M : a_n \leq M$$

  Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

- Eine divergente Folge die nicht bestimmt divergiert (uneigentlich konvergiert), nennt man *unbestimmt divergent.*

Bemerke: Bestimmt divergente Folgen sind automatisch divergent.

Beispiele:

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$
- $(-1)^n$ ist unbestimmt divergent.

4.1.13 Satz über monotone Folgen

1. Ist $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge, so ist (a_n) konvergent und es gilt

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} =: \sup(a_n)$$

2. Ist $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge, so ist (a_n) konvergent und es gilt

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} =: \inf(a_n)$$

4.1.14 Satz: Intervallschachtelungsprinzip

Seien $I_n := [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Intervalle, so dass $I_{n+1} \subset I_n$, das heißt $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$, und $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Dann existiert genau ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$$

Dabei gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

4.1.15 Definition: Häufungspunkt einer Folge

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* oder *Häufungswert* einer Folge $(a_n) \subset \mathbb{R} :\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, m \in \mathbb{N} : \exists\, n \in \mathbb{N} :\ n > m\ \wedge\ |a_n - a| \leq \varepsilon$$

Geometrische Interpretation: In jedem Intervall $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ der Länge 2ε um a liege unendlich viele Glieder der Folge. Außerhalb können auch beliebig viele Glieder der Folge liegen.

Bemerkungen:

- Eine Folge kann mehrere Häufungspunkte haben.
- Der Häufungspunkt einer Folge kann als verallgemeinerter Grenzwert aufgefasst werden.

Beispiel: Die Folge $a_n = (-1)^n$ besitzt die Häufungspunkte -1 und 1.

4.1.16 Definition: Uneigentlicher Häufungspunkt

Ist eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) unbeschränkt, so heißt $+\infty$ $(-\infty)$ *uneigentlicher Häufungspunkt* der Folge.

4.1.17 Satz über Häufungspunkte einer Folge

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt:

1. $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von (a_n) $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$
2. $\pm\infty$ ist uneigentlicher Häufungspunkt von (a_n) $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \pm\infty$
3. Jede konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt, und zwar den Grenzwert der Folge.
4. Jede uneigentlich konvergente Folge besitzt genau einen uneigentlichen Häufungspunkt, und zwar den uneigentlichen Grenzwert der Folge $(\pm\infty)$.

4.1.18 Lemma: Existenz monotoner Teilfolgen

Jede reelle Zahlenfolge enthält eine monotone Teilfolge.

4.1.19 Satz von Bolzano - Weierstraß

Jede beschränkte Zahlenfolge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
Anders formuliert: Jede beschränkte Zahlenfolge enthält eine konvergente Teilfolge.

4.1.20 Definition: Limes Superior, Limes Inferior

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann heißt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \limsup_{n\to\infty} := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k := \lim_{n\to\infty} \sup\,\{a_k : k \geq n\}$$

Limes Superior oder *oberer Limes* der Folge (a_n).
Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Dann heißt

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \liminf_{n\to\infty} := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k := \lim_{n\to\infty} \inf\,\{a_k : k \geq n\}$$

Limes Inferior oder *unterer Limes* der Folge (a_n).

Bemerkungen:

- Die Folge $b_n := \sup\limits_{k \geq n} a_k$ ist für eine nach oben beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton fallend. Nach dem Satz von Bolzano Weierstraß (4.1.19) ist sie demnach konvergent oder uneigentlich konvergent gegen $-\infty$.
- Die Folge $c_n := \inf\limits_{k \geq n} a_k$ ist für eine nach unten beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend. Sie ist deshalb auch konvergent oder uneigentlich konvergent gegen $+\infty$.

4.1.21 Satz über Limes Superior und Inferior einer Folge

Sei (a_n) beschränkt. Dann ist $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ größter und $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$ kleinster Häufungspunkt von (a_n).

4.1.22 Satz: Charakterisierung konvergenter Folgen

1. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent wenn sie beschränkt ist und $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = \liminf\limits_{n \to \infty} a_n$
2. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent wenn sie beschränkt ist und höchstens einen Häufungspunkt besitzt.

4.1.23 Definition: Cauchyfolge

Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *Cauchyfolge* $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \geq n_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

4.1.24 Cauchyfolgen Konvergenzkriterium im $\mathbb{R}$

Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolge ist.

Bemerkungen:

- Allgemein ist dies in metrischen Räumen nicht selbstverständlich. Eine konvergente Folge ist zwar immer Cauchy, doch gilt die Umkehrung nicht unbedingt. Man definiert daher einen metrischen Raum als *vollständig*, falls auch jede Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert (vgl. Analysis II).
- Um die Konvergenz einer Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ nachzuweisen genügt es daher zu zeigen, dass (a_n) Cauchyfolge ist. Dabei braucht man den Grenzwert nicht zu kennen.

4.1.25 Theorem: Vollständigkeit im $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. **Vollständigkeitsaxiom:** Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (3.1.7).
2. **Satz über monotone Folgen:** Jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge besitzt einen Grenzwert (4.1.13).
3. **Satz von Bolzano-Weierstraß:** Jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge (4.1.19).
4. Jede **Cauchyfolge** $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ (4.1.24).
5. **Intervallschachtelungsprinzip** (4.1.14).

Bemerkung: Die Aussagen (3) und (4) haben große Bedeutung in der Mathematik und dienen zur Einführung der Begriffe *Kompaktheit* und *Vollständigkeit* in metrischen Räumen.

4.2 Reihen

4.2.1 Definition: Reihe

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahlenfolge. Die Folge

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k \ , \ n_0 \in \mathbb{Z} \ , \ n \geq n_0$$

der Partialsummen, heißt (unendliche) *Reihe*. Schreibweise:

$$\sum_k a_k := \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k := (S_n) : \text{Folge der Partialsummen}$$

Konvergiert (S_n), so heißt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

Summe oder *Wert* der Reihe. Bemerke dass das vorhanden sein der Konvergenz <u>nicht</u> vom Anfangsindex n_0 abhängt!

Achtung: Das Symbol $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ wird in zweifacher Hinsicht verwendet: Zum einen als Symbol für die Reihe und zum anderen als Wert der Reihe im Fall der Konvergenz.

4.2.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

(i) Ist $\sum\limits_k a_k$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_k c \cdot a_k$ konvergent für $c \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

(ii) Sind $\sum\limits_k a_k$ und $\sum\limits_k b_k$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_k a_k$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$$

(iii) Ist $\sum\limits_k a_k$ konvergent, so ist auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \right] \quad \text{mit} \quad n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \right]$$

(*Setzen von Klammern ist erlaubt*).

Beispiele:

- Die Geometrische Reihe, erzeugt durch die Folge $a_n := q^n, \ n \in \mathbb{N}_0$, gemäß

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n := 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

ist konvergent für $|q| < 1$ und divergent für $|q| = 1$. Für $q \geq 1$ ist sie jedoch bestimmt divergent gegen $+\infty$ (vgl. 4.1.12).

- Die harmonische Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
ist divergent.
- Die alternierende harmonische Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
ist konvergent.

4.2.3 Lemma: Notwendige Bedingung an konvergente Reihen

Ist $\sum_k a_k$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4.2.4 Definition: Absolute Konvergenz von Reihen

Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow \sum_k |a_k|$ ist konvergent.

4.2.5 Korollar über absolut konvergente Reihen

Ist eine Reihe $\sum_k a_k$ absolut konvergent in $\mathbb{R}$, so ist sie auch konvergent.

Beachte: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht! Beispiel: Alternierende harmonische Reihe.

4.2.6 Konvergenzkriterien für Reihen

Betrachten die Reihe $\sum_k a_k$.

1. **Cauchy-Kriterium:** $\sum_k a_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow$
$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n > m \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$
2. **Monotonie-Kriterium:** Seien $a_n \geq 0$ für $n \geq n_0$. Dann gilt: $\sum_k a_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ (S_n) ist beschränkt.
3. **Majorantenkriterium:** Seien $|a_n| \leq c_n$ für $n \geq n_0$. Dann gilt: $\sum_k c_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_k a_k$ konvergent.
4. **Minorantenkriterium:** Seien $a_n \geq d_n \geq 0$ für $n \geq n_0$. Dann gilt: $\sum_k d_k$ divergent $\Rightarrow \sum_k a_k$ divergent.
5. **Teleskop-Summen-Kriterium** oder **Verdichtungskriterium**: Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton fallend und $a_n \geq 0$ für $n \geq n_0$. Dann gilt: $\sum_k a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_k 2^k a_{2^k}$ konvergent.
6. **Wurzelkriterium:** Sei $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt folgendes:
   - Für $\alpha < 1$ ist $\sum_k a_k$ konvergent.
   - Für $\alpha > 1$ ist $\sum_k a_k$ divergent.

Für $\alpha = 1$ existieren sowohl konvergente als auch divergente Reihen.

7. **Quotientenkriterium:** Seien $\underline{\beta} := \liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und $\overline{\beta} := \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann gilt:

   - Für $\overline{\beta} < 1$ ist $\sum\limits_k a_k$ konvergent.
   - Für $\underline{\beta} > 1$ ist $\sum\limits_k a_k$ divergent.

8. **Leipnizsches Konvergenzkriterium:** Sei (a_n) eine monotone Folge für $n \geq n_0$ und sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann ist die alternierende Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$
konvergent.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$
ist konvergent.

4.2.7 Definition: Umordnung einer Reihe

Für gegebenes $n_0 \in \mathbb{Z}$ sei
$$\varphi : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\} \to \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$$
eine Bijektion. Dann heißt $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Im folgenden sei o.B.d.A $n_0 = 1$.

4.2.8 Satz: Umordnung absolut konvergenter Reihen

Die Reihe $\sum\limits_k a_k$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow$ Jede Umordnung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ der Reihe $\sum\limits_k a_k$ ist konvergent. Dabei gilt:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

4.2.9 Definition: Unbedingte & bedingte Konvergenz

Eine konvergente $\sum\limits_k a_k$ Reihe heißt

- *Unbedingt konvergent* $:\Leftrightarrow$ Alle ihre Umordnungen konvergieren.
- *Bedingt konvergent* $:\Leftrightarrow$ Die Reihe ist <u>nicht</u> unbedingt konvergent.

Bemerke: Nach Satz 4.2.8 ist unbedingte Konvergenz äquivalent zur absoluten Konvergenz.

4.2.10 Der Riemannsche Umordnungssatz

Sei $\sum\limits_k a_k$ eine bedingt konvergente Reihe. Dann gilt: $\forall\ S \in \mathbb{R}$ existiert eine Umordnung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S$

4.2.11 Definition: Produktreihe

Betrachten die Folgen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$. Ordnet man die (abzählbar vielen) Produkte $a_i b_j$ zu einer Folge $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ an, so wird die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ als *Produkt* oder *Produktreihe* der Reihen $\sum\limits_k a_k$, $\sum\limits_k b_k$ bezeichnet.
Bemerke: Ob die Produktreihe konvergiert oder nicht, hängt im allgemeinen von der Reihenfolge der Produkte p_n ab!

4.2.12 Satz über das Produkt absolut konvergenter Reihen

Seien $\sum\limits_k a_k$, $\sum\limits_k b_k$ absolut konvergent. Dann ist auch deren Produktreihe $\sum\limits_n p_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

4.2.13 Definition: Cauchy-Produkt

Betrachten die Folgen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ und die Anordnung deren Produkte $a_i b_j$

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} p_0 & p_1 & p_3 & p_6 & . \\ p_2 & p_4 & p_7 & . & \\ p_5 & p_8 & . & & \\ p_9 & . & & & \\ . & & & & \end{array}$$

Durch das so genannte *Diagonalverfahren* ergibt sich eine wohldefinierte Reihenfolge, in der die Produkte $a_i b_j$ zur Produktfolge p_n zusammengefasst werden sollen:

$$p_0 := a_0 b_0 \ , \ p_{n+1} := \begin{cases} a_{i+1} b_{j-1} & : p_n = a_i b_j \ , \ j > 0 \\ \\ a_0 b_{i+1} & : p_n = a_i b_0 \end{cases}$$

Die dadurch entstehende Produktreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

heißt *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum\limits_k a_k$, $\sum\limits_k b_k$

4.2.14 Satz über das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen

Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent. Dann ist das Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ der Reihen absolut konvergent, das heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

4.3 Unendliche Produkte

4.3.1 Definition: Partialprodukt

Ist (a_n) eine Folge komplexer Zahlen, so heißt

$$P_n := \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Partialprodukt aus den ersten n Gliedern dieser Folge. Man sagt das *unendliche Produkt*

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert, falls die Folge P_n konvergiert. Besitzt P_n keinen Grenzwert, so sagt man dass $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergiert.*

4.3.2 Zusammenhang zwischen Reihen und Produkten

Es sei (a_k) eine komplexe Folge mit $a_k \neq 0 \; \forall \; k \in \mathbb{N}$. Das unendliche Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert genau dann gegen einen Wert $\neq 0$, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(a_k)$$

gegen einen endlichen Wert konvergiert. Dabei gilt:

$$\ln\left[\prod_{k=1}^{\infty} a_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(a_k)$$

und ln ist der Hauptzweig des Logarithmus.

4.3.3 Notweniges Kriterium zur Konvergenz unendlicher Produkte

Es sei (a_k) eine komplexe Zahlenfolge mit $a_k \neq 0 \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$. Konvergiert das unendliche Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gegen einen Wert $\neq 0$, so muss gelten

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 1$$

4.3.4 Konvergenzkriterien für unendliche Produkte

1. Sei (h_k) eine reelle Folge mit $h_k \geq 0$. Das unendliche Produkt

   $$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + h_k)$$

   konvergiert genau dann, wenn die Reihe

   $$\sum_{k=1}^{\infty} h_k$$

   konvergiert.

2. Seien $1 > h_k \geq 0$ reell. Dann konvergiert

   $$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - h_k)$$

   genau dann gegen einen Wert $\neq 0$, wenn

   $$\sum_{k=1}^{\infty} h_k$$

   konvergiert.

5 Funktionen & Stetigkeit

5.1 Topologische Begriffe

5.1.1 Definition: Kugel

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

- $B_\varepsilon(a) := [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ heißt *abgeschlossene Kugel* um a vom Radius ε.
- $B_\varepsilon^o(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ heißt *offene Kugel* um a vom Radius ε, oder *ε-Umgebung von a*.

5.1.2 Definition: Offene & abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$

Eine Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ heißt *offen* $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in \mathcal{O} : \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \mathcal{O} \quad (B_\varepsilon^o \subset \mathcal{O})$$

das heißt zu jedem $x \in \mathcal{O}$ existiert eine ε-Umgebung von x die ganz in $\mathcal{O}$ liegt.
Eine Menge $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}^c = \mathbb{R} \setminus \mathscr{A}$ ist offen.

Beispiele:

a) $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

b) Offene Kugeln sind offene Mengen.

c) Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossene Mengen.

d) Offene Intervalle (a,b), $(-\infty,a)$, (a,∞) sind offene Mengen.

e) Abgeschlossene Intervalle $[a,b]$, $(-\infty,a]$, $[a,\infty)$ sind abgeschlossene Mengen.

f) Endliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener (bzw. abgeschlossener) Mengen sind offen (bzw. abgeschlossen).

g) Beliebige (auch unendliche) Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.

h) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

i) **Aber:** Beliebige Schnitte offener Mengen sind im allgemeinen nicht offen. Beispiel:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{offen}} = [0,1]$$

j) Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind im allgemeinen nicht abgeschlossen. Beispiel:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]}_{\text{abgeschlossen}} = (0,1)$$

Bemerkung: Offene und abgeschlossene Mengen können auch bzgl. Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$ formuliert werden:

- Eine Menge $\mathcal{O} \subset D$ heißt *offen in D* $:\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in D : \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap D \subset \mathcal{O}$
- Eine Menge $\mathscr{A} \subset D$ heißt *abgeschlossen in D* $:\Leftrightarrow$ $D \setminus \mathscr{A}$ ist offen in D

5.1.3 Satz: Charakterisierung abgeschlossener Mengen

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$

$$\forall\, (x_n) \subset A : (x_n) \text{ konvergent in } \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n \in A$$

5.1.4 Definition: Häufungspunkt einer Menge

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer Menge $A \subset \mathbb{R}$:⇔

$$\exists\ (a_n) \subset A \setminus \{a\} : a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Bemerke:

- a muss nicht unbedingt in A liegen. Beispiel: $A = [0, 1)\ ,\ a = 1$
- Nicht jeder Punkt in A ist auch Häufungspunkt von A. Beispiel: $A = [0, 1] \cup \{2\}\ ,\ a = 2$

5.1.5 Definition: Abgeschlossene Hülle

Die *abgeschlossene Hülle* $\overline{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist der Schnitt $\overline{A}$ aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die A enthalten:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{\mathscr{A} \supset A \\ \mathscr{A} \text{ abgeschlossen}}} \mathscr{A}$$

Alternativ: $\overline{A}$ ist die menge aller Grenzwerte konvergenter Folgen, deren Glieder in A liegen, das heißt

$$\overline{A} = \left\{ \lim_{n\to\infty} x_n : (x_n) \subset A \text{ konvergent} \right\}$$

5.1.6 Definition: Kompakte Menge

Eine Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt* :⇔ Jede Folge aus $\mathcal{K}$ enthält ein in $\mathcal{K}$ konvergente Teilfolge:

$$\forall\ (x_n) \subset \mathcal{K} : \exists\ \ (x_{n_k}) \subset (x_n) : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in \mathcal{K}$$

5.1.7 Theorem: Charakterisierung kompakter Mengen

Für eine Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{K}$ ist kompakt.

(ii) $\mathcal{K}$ ist beschränkt und abgeschlossen.

(iii) Für offene Mengen $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ mit $\mathcal{K} \subset \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$ existieren endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $\mathcal{K} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$ (*Überdeckungskompaktheit*)

Bemerkungen:

- Aussage (ii) gilt im allgemeinen nur in endlich-dimensionalen Räumen.
- Aussage (iii) bildet die Basis der Definition der Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen.

Beispiele:

- $[a, b]$ ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt.
- Endliche Mengen sind kompakt.

5.2 Grenzwert & Stetigkeit

5.2.1 Definition: Grenzwert von Funktionen

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $\alpha \in \overline{D}$. Dann hat f in α den *Grenzwert* $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:⇔

$$\forall\ (x_n) \subset D : \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = c$

Beispiel: Für die Funktion

$$f : D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

5.2.2 Definition: Einseitiger Grenzwert von Funktionen

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $\alpha \in \overline{D}$.

- f hat in α den *rechtsseitigen Grenzwert* $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:⇔

  $$\forall\ (x_n) \subset D : x_n \geq \alpha\ \wedge\ x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha\ \Rightarrow\ f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

  Man schreibt:

  $$\lim_{x\to\alpha+0} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\searrow\alpha} f(x) = c$$

- f hat in α den *linksseitigen Grenzwert* $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:⇔

  $$\forall\ (x_n) \subset D : x_n \leq \alpha\ \wedge\ x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha\ \Rightarrow\ f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

  Man schreibt:

  $$\lim_{x\to\alpha-0} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\nearrow\alpha} f(x) = c$$

- f hat für $x \to +\infty$ den *Grenzwert* $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:⇔

  $$\forall\ (x_n) \subset D\ :\ x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\ \Rightarrow\ f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

- f hat für $x \to -\infty$ den *Grenzwert* $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:⇔

  $$\forall\ (x_n) \subset D\ :\ x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\ \Rightarrow\ f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

5.2.3 Definition: Stetigkeit

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in D$. Dann heißt f:

- *Stetig in* α :⇔ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha$
- *Unstetig in* α :⇔ f ist <u>nicht</u> stetig in α
- *Stetig in* D :⇔ f ist stetig in jedem Punkt von D

Man definiert ferner für $\Omega \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$$

Beispiele:

- $f(x) = 1$ ist stetig in $\mathbb{R}$
- $f(x) = x$ ist stetig in $\mathbb{R}$

5.2.4 Definition: Einseitige Stetigkeit

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in D$. Dann heißt f:

- *Rechtsstetig* oder *rechtsseitig stetig in* $\alpha :\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- *Linksstetig* oder *linksseitig stetig in* $\alpha :\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = f(\alpha)$
- *Rechts-* bzw. *linksstetig* in D falls f rechts- bzw. linksstetig ist in jedem Punkt von D.

5.2.5 Lemma: Stetigkeit und einseitige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $\alpha \in D$ bzw. in $D \Leftrightarrow f$ ist rechts- und linksstetig in α bzw. D.

5.2.6 Rechenregeln für stetige Funktionen

1. Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$, so sind auch $f + g,\ f \cdot g,\ \lambda \cdot f\ (\lambda \in \mathbb{R})$ stetig in a. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ stetig in a, mit $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.
2. Seien $f : D \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R},\ f(D) \subset E$. Ist f in $a \in D$ und g in $f(a)$ stetig, so ist auch $g \circ f$ in a stetig.

5.2.7 $\varepsilon - \delta$ - Definition von Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D \Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in D : |x - a| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Erläuterung: $f(x)$ weicht *beliebig wenig* von $f(a)$ ab, falls x hinreichend *nahe* bei a liegt. f ist somit Stetig in a falls:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : f\left(B_\delta(a) \cap D\right) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

das heißt zu jeder ε-Umgebung $B_\varepsilon(f(a))$ um $f(a)$ existiert eine (gegebenfalls von ε abhängige) δ-Umgebung um a bzgl. D, so dass alle Punkte aus $B_\delta(a) \cap D$ in $B_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden.

5.2.8 Charakterisierung stetiger Funktionen

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig in D.

(ii) Für in D offene Menge $\mathcal{O} \subset D$ ist auch $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen in D.

(iii) Für in D abgeschlossene Menge $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ ist auch $f^{-1}(\mathscr{A})$ abgeschlossen in D.

Bemerkung: Hinsichtlich der Eigenschaft (ii), wird allgemein die Stetigkeit von Funktionen zwischen topologischen Räumen definiert.

5.3 Stetigkeit & Kompaktheit

5.3.1 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, x, y \in D : |x - y| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Beachte: Ist f gleichmäßig stetig auf D, so ist f stetig auf D. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Beispiel: $f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0, 1] \subset \mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig.

5.3.2 Satz über stetige Funktionen auf kompakten Mengen [Heine-Cantor]

Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. f ist gleichmäßig stetig auf $\mathcal{K}$
2. $f(\mathcal{K})$ ist kompakt.

5.3.3 Verallgemeinerter Satz von Heine-Cantor

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig so dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert und endlich ist. Dann ist f gleichmäßig stetig.

5.3.4 Satz: Maximum & Minimum von Funktionen

Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $p, q \in \mathcal{K}$, so dass gilt:

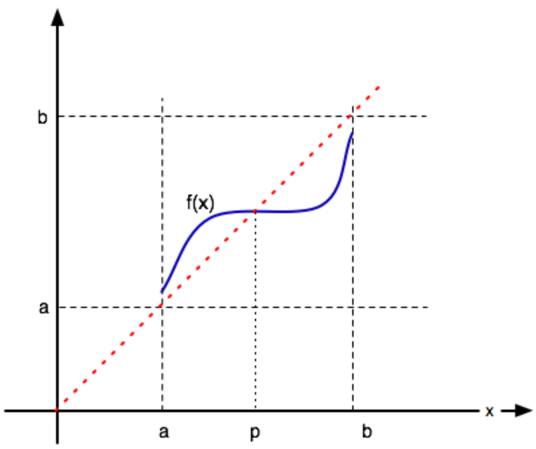
$$f(p) = \sup_{x\in\mathcal{K}} f(x) \quad , \quad f(q) = \inf_{x\in\mathcal{K}} f(x)$$

das heißt f nimmt auf $\mathcal{K}$ ihr *Maximum* und *Minimum* an.

Beachte: Die Kompaktheit von $\mathcal{K}$ ist essentiell. Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathcal{K} = (0, \infty)$.

5.3.5 Zwischenwertsatz

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq C \leq f(b)$. Dann $\exists\, p \in [a, b] : f(p) = C$
2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $f([a, b]) \subset [a, b]$. Dann $\exists\, p \in [a, b] : f(p) = p$. Dabei heißt p *Fixpunkt* von f.



5.3.6 Definition: Monotone Funktion

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D:

- *Monoton wachsend* $:\Leftrightarrow\ \forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$
- *Streng monoton wachsend* $:\Leftrightarrow\ \forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$
- *Monoton fallend* $:\Leftrightarrow\ \forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$
- *Streng monoton fallend* $:\Leftrightarrow\ \forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$

5.3.7 Satz über die Inverse streng monotoner Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend), $f(a) =: A$, $f(b) =: B$. Dann ist $f : [a, b] \to [A, B]$ bijektiv und $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

6 Elementare Funktionen

6.1 Polynome und rationale Funktionen

6.1.1 Definition: Polynom

Eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Darstellung

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ a_n \neq 0 \ , \ n \geq 0$$

heißt *reelles Polynom vom Grad n*. Man schreibt: $P \in \mathbb{R}[X]$.

6.1.2 Lemma über die Eindeutigkeit von Polynomen

Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ reelle Polynome, mit der Darstellung

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ Q = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Es ist $P = Q$ genau dann wenn $n = m$ und $a_k = b_k \ \forall \ k = 0, .., n$ ist.

6.1.3 Definition: Rationale Funktion

Seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ zwei reelle Polynome. Dann heißt die Funktion $R : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \ , \ D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

rationale Funktion.

6.1.4 Satz: Stetigkeit von Polynomen & rationalen Funktionen

Polynome und rationale Funktionen sind stetig in ihrem Definitionsgebiet.

6.2 Exponentialfunktion, Logarithmus und Potenzfunktionen

6.2.1 Definition: Exponentialfunktion

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ sei definiert

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Diese Reihe ist $\forall \ x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Somit definiert $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $\mathbb{R}$: die *Exponentialfunktion.*

6.2.2 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt folgende Eigenschaften:

1. exp ist stetig, streng monoton wachsend und bildet bijektiv auf $(0, \infty)$ ab.
2. Es ist $\exp(0) = 1 \ , \ \exp(1) = e$
3. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
4. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

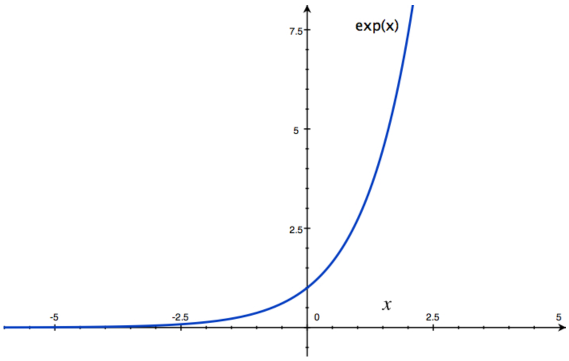
5. Abschätzung des Restgliedes: Mit

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{R_{N+1}(x)}$$

gilt die Abschätzung

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{für} \quad |x| \leq 1 + \frac{N}{2}$$

Im folgenden sei der Graph von exp illustriert:



6.2.3 Definition: Natürliche Logarithmus

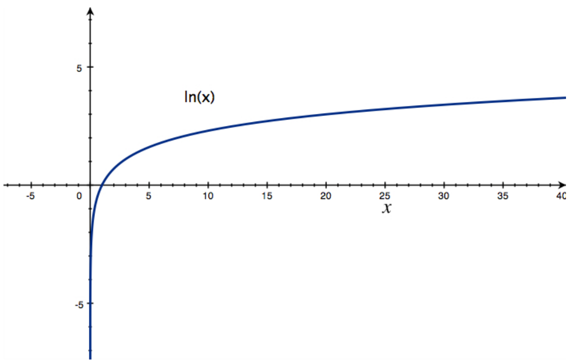
Die Umkehrfunktion $\ln := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt der *natürliche Logarithmus*. Schreibweise: $\log$, $\ln$

6.2.4 Eigenschaften des natürlichen Logarithmus

Der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ erfüllt die Eigenschaften:

1. ln ist stetig und streng monoton wachsend.
2. Für $x, y \in (0, \infty)$ gilt $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

Im folgenden sei der Graph von ln illustriert:



6.2.5 Definition: Exponentialfunktion zur Basis a

Sei $a > 0$. Dann heißt $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

Exponentialfunktion zur Basis a.

6.2.6 Eigenschaften von $\exp_a$

Sei $a > 0$. Dann ist die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gilt:

1. $\exp_a(x) > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
2. $\exp_1(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
3. $\exp_e(x) = \exp(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
4. $\exp_a(0) = 1$
5. $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
6. $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad \forall\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$, wobei $\sqrt[q]{x} := \exp_x\left(\frac{1}{q}\right)$
7. $\exp_a$ ist für $a < 1$ streng monoton fallend und für $a > 1$ streng monoton wachsend.
8. Ist $a \neq 1$ so ist $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ stetig und bijektiv.

6.2.7 Definition: a^x

Satz 6.2.6 rechtfertigt die Bezeichnung $a^x := \exp_a(x)$. Für $a = e$ ist dann genau $e^x = \exp(x)$.

6.2.8 Eigenschaften von a^x

Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(a^x)^y = a^{xy}$
2. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
3. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$
4. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$
5. $\ln(a^x) = x \cdot \ln a$

6.2.9 Definition: Logarithmus zur Basis a

Für $1 \neq a > 0$ heißt die Umkehrfunktion $\log_a := \exp_a^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der *Logarithmus zur Basis a*.

6.2.10 Eigenschaften von $\log_a$

Für $1 \neq a > 0$ ist $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$. Ferner gilt:

1. $\log_e = \ln$
2. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \quad \forall\, x > 0$
3. Allgemeiner sogar: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad \forall\, x > 0,\ 1 \neq b > 0$
4. $\log_a x^y = y \cdot \log_a x \quad \forall\, x > 0,\ y \in \mathbb{R}$

6.2.11 Definition: Potenzfunktion

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann heißt: $f_a(x) := x^a$ für $x \geq 0$ im Fall $a > 0$, wobei $0^a := 0$, bzw. $x > 0$ im Fall $a < 0$, *Potenzfunktion mit dem Exponenten* a. Dabei ist $x^a = \exp(a \ln x)$.
Bemerkung: Im Fall $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ wird $f_{\frac{1}{n}}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ als n-te Wurzel bezeichnet:

$$\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}$$

6.2.12 Satz über die Potenzfunktion

1. Sei $a > 0$. Dann ist $f_a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.
2. Sei $a < 0$. Dann ist $f_a : (0, \infty) \to (0, \infty)$ stetig, bijektiv und streng monoton fallend.
3. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Umkehrfunktion f_a^{-1} von a die Funktion $f_{\frac{1}{a}}$:

$$f_a \circ f_{\frac{1}{a}} = \mathrm{Id}$$

6.3 Konvergenz in $\mathbb{C}$

6.3.1 Einführung in die komplexen Zahlen

Betrachten den Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* (vgl. Lineare Algebra):

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Dabei ist i definiert gemäß $i^2 = -1$. Man nennt $\Re(x+iy) = x$, $\Im(x+iy) = y$ jeweils den *Real-* und *Imaginärteil* von $x+iy \in \mathbb{C}$.

Operationen in $\mathbb{C}$

- Für $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ ist

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\ ,\ z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

- Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ nennt man $\overline{z} := x - iy$ die *zu z komplex konjugierte.*
- Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ heißt $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ *Betrag* von z. Dabei erfüllt $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ die Eigenschaften:
  - Positiv-Definitheit: $|z| \geq 0\ \forall\ z \in \mathbb{Z}$ und $|z| = 0\ \Leftrightarrow z = 0$
  - Homogenität: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}$
  - Dreiecksungleichung: $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ ,\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}\left[z + \overline{z}\right]\ ,\ \Im(z) = \frac{1}{2i}\left[z - \overline{z}\right]$

6.3.2 Definition: Konvergente Folge in $\mathbb{C}$

Eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ heißt *konvergent* :⇔

$$\exists\ z \in \mathbb{C} : \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\ n \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_\varepsilon\ \Rightarrow\ |z_n - z| \leq \varepsilon$$

Analog zum reellen, ist der *Grenzwert* z eindeutig bestimmt, und man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z\ ,\ z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z\ ,\ z_n \to z$

6.3.3 Satz über konvergente Folgen in $\mathbb{C}$

Es sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$ eine komplexe Zahlenfolge. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z) \;\wedge\; \lim\limits_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(z)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z_n}$
3. (z_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (z_n) ist Cauchyfolge, das heißt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_\varepsilon \;\Rightarrow\; |z_n - z_m| \leq \varepsilon$$

6.3.4 Definition: Reihen in $\mathbb{C}$

Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ sei $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$ die n-te *Partialsumme*. Dann heißt die Folge der Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k := (S_n)$$

Reihe. Ist diese konvergent, so heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

Summe oder *Wert* der Reihe.

6.3.5 Lemma: Komplex konjugieren von Reihen

Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergent, so gilt

$$\overline{\sum_{k=0}^{\infty} z_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z_k}$$

6.3.6 Definition: Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z_k|$ ist konvergent.

Bemerkung: Für Reihen im komplexen gelten im wesentlichen die gleichen Aussagen wir für Reihen im reellen. Ausnahme bilden Aussagen in denen die Ordnung der reellen Zahlen eine Rolle spielen.

6.3.7 Definition: Kugel, abgeschlossene & offene Menge

- Für $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt $B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq \varepsilon\}$ *abgeschlossene ε-Kugel um z*
- Für $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt $B_\varepsilon^o(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ *offene ε-Kugel um z* oder *ε-Umgebung von z.*
- Eine Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ heißt *offen* $:\Leftrightarrow\; \forall\, z \in \mathcal{O} : \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(z) \subset \mathcal{O}$
- Eine Menge $\mathscr{A} \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow \mathcal{O}^c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{O}$ ist offen.

Beispiel: Abgeschlossene bzw. offene Kugeln sind abgeschlossen, bzw. offen.

6.3.8 Definition: Abgeschlossene Hülle

Die *abgeschlossene Hülle* $\overline{A}$ einer Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist der Schnitt $\overline{A}$ aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, die A enthalten:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{\mathscr{A} \supset A \\ \mathscr{A} \text{ abgeschlossen}}} \mathscr{A}$$

Alternativ: $\overline{A}$ ist die menge aller Grenzwerte konvergenter Folgen, deren Glieder in A liegen, das heißt

$$\overline{A} = \left\{ \lim_{n\to\infty} x_n : (x_n) \subset A \text{ konvergent} \right\}$$

6.3.9 Definition: Grenzwert einer Funktion in $\mathbb{C}$

Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in \overline{D}$. Dann hat f in a den Grenzwert $c \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$ $:\Leftrightarrow$

$$\forall\ (x_n) \subset D : z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \ \Rightarrow\ f(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

Schreibweise: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c$

6.3.10 Definition: Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *stetig in* $z_0 \in D$ $:\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Sie heißt ferner *stetig in* D, falls sie stetig in jedem Punkt von D ist.

Bemerke: Wie im reellen, gilt auch hier die Äquivalenz: f ist stetig in $z_0 \in D \Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta_\varepsilon : \forall\ z \in B_{\delta_\varepsilon}(z_0) : |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

6.4 Elementare Funktionen in $\mathbb{C}$

6.4.1 Definition: Komplexe Exponentialfunktion

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Somit definiert

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ,\ \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\ ,\ z \in \mathbb{C}$$

eine Funktion auf $\mathbb{C}$: die *Exponentialfunktion.*
Schreibweise: $e^x = \exp(x)$.

6.4.2 Eigenschaften der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzt die Eigenschaften:

1. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.
2. Funktionalgleichung: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
3. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}\ ,\ z \in \mathbb{C}$
4. $|e^z| = e^{\Re z}$
5. $\left| e^z - \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{z^k}{k!} \right| \leq 2 \dfrac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ für $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$
6. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = 1$

6.4.3 Definition: Trigonometrische Funktionen

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann setzt man:

- $\cos(x) := \Re(e^{ix})$: *Kosinus*
- $\sin(x) := \Im(e^{ix})$: *Sinus*

Es ist also:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad : \quad \text{Eulersche Formel}$$

Ferner definiert man für $x \in \mathbb{R},\ \cos x \neq 0$ den *Tangens* $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ und für $x \in \mathbb{R},\ \sin x \neq 0$ den *Kotangens* $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$.

6.4.4 Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.
2. $|\cos x| \leq 1,\ |\sin x| \leq 1$
3. cos besitzt die Darstellung
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
4. sin besitzt die Darstellung
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$
5. cos ist gerade, das heißt $\cos(x) = \cos(-x)$
6. sin ist ungerade, das heißt $\sin(x) = -\sin(-x)$
7. Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
8. Additionstheoreme:
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
10. cos hat eine kleinste Positive Nullstelle $1 < a < 2$. Man setzt $\pi := 2a$, und es gilt $\sin \frac{\pi}{2} = 1\ ,\ \cos \frac{\pi}{2} = 0$
11. cos und sin sind 2π-Periodisch:
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x\ ,\ \sin(x + 2\pi) = \sin x$$
12. Es gilt
$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x\ ,\ \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$$
13. Die Abbildung
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
ist streng monoton wachsend.
14. Die Abbildung
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
ist streng monoton fallend.

7 Differentiation

7.1 Differenzierbarkeit

7.1.1 Definition: Differenzierbarkeit

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in D$ sogar Häufungspunkt von D. Dann heißt f *in a differenzierbar* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \exists\, r : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R} : \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} \ \wedge\ f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)$$

Ferner heißt f *in D differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ f ist in jedem Punkt von D differenzierbar.

7.1.2 Definition: Ableitung

Sei $f : D \subset \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, mit

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)\ ,\ \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$$

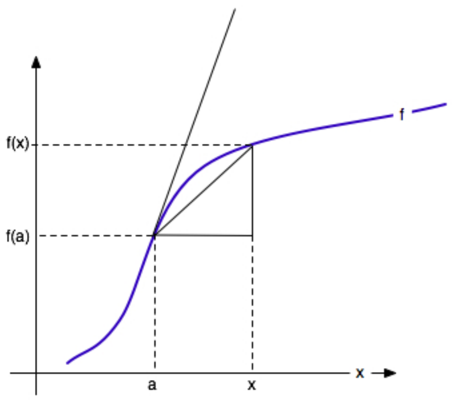
Dann ist der Wert c eindeutig bestimmt, und heißt *Ableitung von f an der Stelle a*. Man schreibt: $f'(a) = c\ ,\ \frac{df}{dx}(a) = c$

7.1.3 Charakterisierung von Differenzierbarkeit

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist f in a differenzierbar $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ existiert. Dann gilt

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Geometrische Interpretation: Der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ ist die Steigung der Sekante des Graphen von f durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Beim Grenzübergang $x \to a$ geht die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ über. $f'(a)$ ist also die Steigung der Tangente im Punkt $(a, f(a))$.



Beispiele:

- Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ gilt $f'(a) = 0$
- Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c \cdot x$ gilt $f'(a) = c$
- $\exp'(x) = \exp(x)$

7.1.4 Korollar: Stetigkeit differenzierbarer Funktionen

Ist $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist f in a stetig.
Beachte: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht! Beispiel: $f(x) := |x|$ ist zwar stetig, jedoch in $x = 0$ nicht differenzierbar.

7.1.5 Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

1. Seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g,\ \lambda f,\ f \cdot g$ in x differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}&(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\\ &(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)\\ &(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(Produktregel)}\end{aligned}$$

   Ist $g \neq 0$ in D, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ in $x \in D$ differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

2. Kettenregel: Seien $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und f sei in $x \in D$ differenzierbar und g in $f(x)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

3. Ableitung der Umkehrfunktion: Sei $D = [a, b],\ a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, und $f^{-1} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f, wobei $\tilde{D} = f(D)$. Ist f in $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\ ,\ x = f^{-1}(y)$$

Beispiele:

- Für $f(x) = \ln x$ ist $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- Für $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$ ist $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
- Für $f(x) = a^x,\ a > 0$ ist $f'(x) = a^x \ln a$
- Für $f(x) = x^x,\ x > 0$ ist $f'(x) = x^x\,(1 + \ln x)$
- Für $f(x) = h(x)^{g(x)}$ ist
$$f'(x) = h(x)^{g(x)} \cdot \left[\frac{h'(x)g(x)}{h(x)} + g'(x) \ln h(x)\right]$$
- $\cos'(x) = -\sin x\ ,\ \sin'(x) = \cos x$

7.1.6 Definition: n. Ableitung

(i) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Falls $f' : D' \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := f''(x) := (f')'(x)$$

die *2-e Ableitung von f in x.*
Beachte: f' muss in einer Umgebung $B^\circ_\delta(x)$ definiert sein!

(ii) Allgemein durch Induktion: $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal differenzierbar* in $x \in D$ $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0 : f : D \cap B^o_\varepsilon(x) \to \mathbb{R}$$

ist $(k-1)$ mal differenzierbar in $D \cap B^o_\varepsilon(x)$ und die $(k-1)$ -te Ableitung von f ist in x differenzierbar. Dabei heißt

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x) := \frac{d^k}{dx^k} f(x) := f^{(k)}(x) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x)$$

die *k-te Ableitung* von f.

(iii) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *k-mal in D differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ f ist in jedem Punkt $x \in D$ k-mal differenzierbar.

7.1.7 Leipnizsche Produktformel

Die Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien n-mal differenzierbar. Dann ist $(f \cdot g) : D \to \mathbb{R}$ auch n-mal differenzierbar, und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

7.2 Lokale Extrema, Mittelwertsätze, Konvexität

7.2.1 Definition: Lokales Extremum

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat in $x \in (a, b)$ ein *lokales Extremum* bzw. *Minimum* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \xi \in (a, b) \cap B_\varepsilon(x) : f(\xi) \leq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(\xi) \geq f(x)$$

Trifft die Gleichheit $f(x) = f(\xi)$ nur für $x = \xi$ zu, so sagt man, in x liegt ein *isoliertes lokales Maximum* bzw. *Minimum* vor. *Lokales Extremum* bezeichnet ein lokales Maximum oder Minimum.

Beispiel: Für $f(x) = c$: const ist jeder Punkt sowohl lokales Maximum als auch lokales Minimum.

7.2.2 Satz: Lokale Extrema und Ableitung

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann gilt: $f'(x) = 0$

Beachte: Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht! Beispiel: $f(x) = x^3$ besitzt in $x = 0$ ǩein lokales Extremum, obwohl $f'(0) = 0$ ist.

7.2.3 Satz von Rolle, Mittelwertsätze

Satz von Rolle: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$

1. Mittelwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Mittelwertsatz: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

7.2.4 Lemma: Charakterisierung konstanter Funktionen

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar, mit $f'(x) = 0$ für $x \in (a,b)$. Dann ist $f(x) \equiv c : \text{const}$

7.2.5 Lemma: Charakterisierung von $\exp$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Differenzialgleichung $f' = f$ auf $\mathbb{R}$ und die Anfangsbedingung $f(0) = 1$. Dann ist $f(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

7.2.6 Regel von L'Hopital

Es seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, mit $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ oder $\lim f(x) = \pm\infty,\ \lim g(x) = \pm\infty$. Dabei erfüllen f und g folgende Differenzierbarkeitsvoraussetzungen:

Grenzwert	Differenzierbarkeit in
$x \to a^+$	$(a, q+h)$
$x \to a^-$	$(a-h, a)$
$x \to a$	$(a-h, a+h)$
$x \to +\infty$	(R, ∞)
$x \to -\infty$	$(-\infty, -R)$

für geeignetes $h > 0$ bzw. $R > 0$ und der Grenzwert $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert eigentlich oder uneigentlich. Dann gilt:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiele:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Bemerkung: Gilt $f(x) \to \infty,\ g(x) \to \infty$ mit $g' \neq 0$, so kann der Grenzwert $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existieren, obwohl der Grenzwert $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert. Beispiel: Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = 1$$

existiert, obwohl der Grenzwert

$$\lim \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

<u>nicht</u> existiert.

Weitere unbestimmte Ausdrücke bei Grenzübergängen: Die Funktionen f, g erfüllen die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wie im vorigen Satz.

(i) $0 \cdot \infty$**:** Für $f(x) \to 0,\ g(x) \to \pm\infty$ ist

$$\lim f(x) \cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$$

(ii) $\infty - \infty$**:** Für $f(x), g(x) \to +\infty$ ist

$$\lim\left(f(x) - g(x)\right) = \lim \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \lim \frac{\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]'}{\left[\frac{1}{f(x)g(x)}\right]'}$$

(iii) 0^0**:** Für $f(x) > 0,\ f(x) \to 0^+$ und $g \to 0$ ist

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}} = e^{\lim \frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)'}}$$

(iv) ∞^0**:** Für $f(x) \to \infty,\ g(x) \to 0$ ist

$$\lim f(x)^{g(x)} \overset{\text{analog}}{=} e^{\lim \frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)'}}$$

(v) 1^∞**:** Für $f(x) > 0,\ f(x) \to 1,\ g(x) \to \pm\infty$ ist

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\lim \frac{[\ln f(x)]'}{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}}$$

7.2.7 Satz: Monotonie differenzierbarer Funktionen

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

a) $\forall\, x \in (a,b) : f'(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f$ ist monoton wachsend auf $[a,b]$

b) $\forall\, x \in (a,b) : f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f$ ist streng monoton wachsend auf $[a,b]$

c) $\forall\, x \in (a,b) : f'(x) \leq 0 \;\Rightarrow\; f$ ist monoton fallend auf $[a,b]$

d) $\forall\, x \in (a,b) : f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f$ ist streng monoton fallend auf $[a,b]$

7.2.8 Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar in $x \in (a,b)$ und es gelte $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$. Dann besitzt f in x ein isoliertes, lokales Minimum bzw. Maximum.
Bemerke: Mit diesem Satz ist eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für ein isoliertes lokales Extremum gegeben. Zum Beispiel besitzt die Funktion $f(x) = x^4$ in $x = 0$ ein isoliertes lokales Minimum, obwohl $f'(0) = f''(0) = 0$ ist.

7.2.9 Definition: Konvexität

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein (endliches oder unendliches) Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt:

- *Konvex* $:\Leftrightarrow \forall\, x_0, x_1 \in D\ \forall\, 0 < \vartheta < 1 : f\left((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1\right) \leq (1-\vartheta)f(x_0) + \vartheta f(x_1)$
- *Streng konvex* $:\Leftrightarrow\ \forall\, x_0, x_1 \in D\ \forall\, 0 < \vartheta < 1 : f\left((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1\right) < (1-\vartheta)f(x_0) + \vartheta f(x_1)$
- *Konkav* $:\Leftrightarrow\ (-f)$ ist konvex.
- *Streng konkav:* $:\Leftrightarrow\ (-f)$ ist streng konvex.

7.2.10 Satz: Konvexität und Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ konvex bzw. konkav. Dann ist f stetig auf D.

7.2.11 Satz: Konvexität und Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:
f ist konvex auf $D \Leftrightarrow\ \forall\, x \in D : f''(x) \geq 0$ und
f ist streng konvex auf $D \Leftrightarrow\ \forall\, x \in D : f''(x) > 0$

7.2.12 Definition: Wendepunkt

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar. f besitzt in x_0 einen *Wendepunkt* $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass

$$\forall\ 0 < |h| < \varepsilon : \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > f'(x_0)$$

oder

$$\forall\ 0 < |h| < \varepsilon : \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < f'(x_0)$$

Geometrische Interpretation: Betrachten den 1. Fall

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > f'(x_0) \quad \forall\ 0 < |h| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+h) < f(x_0) + f'(x_0)h \quad \text{für} \quad -\varepsilon < h < 0$$

$$f(x_0+h) > f(x_0) + f'(x_0)h \quad \text{für} \quad 0 < h < \varepsilon$$

7.2.13 Hinreichende Bedingung für Wendepunkt

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner besitze $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ ein isoliertes lokales Extremum. Dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.
Bemerkung: Ist f 2-mal differenzierbar, und gilt:

- entweder $f''(x) < 0$ für $x \in (x_0 - h, x_0)$ und $f''(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + h)$, für geeignetes $h > 0$
- oder $f''(x) > 0$ für $x \in (x_0 - h, x_0)$ und $f''(x) < 0$ für $x \in (x_0, x_0 + h)$, für geeignetes $h > 0$

so besitzt f' in x_0 ein isoliertes lokales Maximum. Ein Wendepunkt kann also als Übergang von konvex zu konkav (bzw. umgekehrt) gedeutet werden.

7.2.14 Kurvendiskussion reeller Funktionen

Mögliches Vorgehen beim Studium einer reellen Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) Symmetrieeigenschaften, eventuelle Charakterisierung als gerade bzw. ungerade Funktion, Periodizität.
2) Nullstellenbestimmung von f, f', f''.
3) Bestimmung mit Hilfe der Nullstellen, der Intervalle in denen
   - f positiv bzw. negativ
   - f wachsend bzw. fallend
   - f konvex bzw. konkav

   ist.
4) Aufsuchen lokaler Extrema.
5) Bestimmung von Wendepunkten.
6) Asymptotisches Verhalten.

7.3 Taylor-Reihen, Satz von Taylor

Problemstellung: Die Approximation von Funktionen in der Nähe eines Punktes, durch möglichst einfache Funktionen (etwa durch Polynome).

7.3.1 Lemma: Darstellung von Polynomen

Sei$p \in \mathbb{R}[X],\ p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom n-ten Grades und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Ein Polynom kann somit durch seine Ableitungen an einem x_0 vollständig beschrieben werden.

7.3.2 Definition: Taylorpolynom

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ n-mal differenzierbar. Dann heißt

$$T_n(f, x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$T_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k$$

n-tes Taylorpolynom von f mit dem *Entwicklungspunkt* x_0.

7.3.3 Definition: Taylorreihe, Taylorentwickelbarkeit

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ beliebig oft differenzierbar. Dann heißt

$$T(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylorreihe von f an der Stelle x mit dem *Entwicklungspunkt* x_0. Ist ferner $f = T(f, x_0)$, so heißt f *Taylorentwickelbar in I mit Entwicklungspunkt x_0.*

Beispiel: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ Taylorentwickelbar:

$$e^x = e^x \cdot e^{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n} e^{x_0} \frac{(x - x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

7.3.4 Definition: n-tes Restglied

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar im Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann heißt

$$R_n := R_n(f, x_0) := f - T_n(f, x_0)$$

n-tes Restglied (der Taylorentwicklung). Definitionsgemäß ist dann f in $x_0 \in I$ Taylorentwickelbar $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(f, x_0)(x) = 0$

7.3.5 Taylorsche Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\forall\ x \in I,\ n \in \mathbb{N} : \exists\ 0 < \vartheta < 1$ so dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{n!p}(1-\vartheta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1} \quad : \quad \text{Restglied von Schlömilch}$$

und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \quad : \quad \text{Taylorsche Formel}$$

Spezialfälle des Restglieds:

- **Lagrange:** Für $p = n + 1$ ist
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

- **Cauchy:** Für $p = 1$ ist
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{n!}(1-\vartheta)^n(x - x_0)^{n+1}$$

8 Integration

8.1 Riemannsches Integral

8.1.1 Einführung

Die klassische Problemstellung der Integralrechnung besteht darin, für eine nicht-negative Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ den Inhalt der so genannte Ordinatenmenge (Fläche unterhalb der Kurve f)

$$\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

zu berechnen. Führen dazu folgende Begriffe ein:

- Zerlegung: Eine Menge

  $$\xi := \{I_1, ..., I_n\}\ ,\ I_i := [x_{i-1}, x_i] \quad \text{mit} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

  heißt *Zerlegung* von $[a, b]$. man identifiziert ξ kanonisch durch die Punkte $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

- Menge alles Zerlegungen von $[a, b]$: $\Xi[a, b]$

- Verfeinerung: Eine Zerlegung ξ' heißt *Verfeinerung* der Zerlegung $\xi :\Leftrightarrow\ \forall\, I' \in \xi' : \exists\, I \in \xi : I' \subset I$.
  Schreibweise: $\xi \prec \xi'$.

- Länge: Für ein Intervall $I = [c, d]$ heißt $l(I) := d - x$ *Länge* von I.

- Durchmesser: Für eine Zerlegung ξ heißt

  $$d(\xi) := \max\{l(I) : I \in \xi\}$$

  Durchmesser von ξ.

- Überlagerung: Für zwei Zerlegungen ξ_1, ξ_2 von $[a, b]$ heißt die Zerlegung

  $$\xi := \{J = I_1 \cap I_2 : I_1 \in \xi_1,\ I_2 \in \xi_2,\ l(J) > 0\}$$

  Überlagerung oder *gemeinsame Verfeinerung* von ξ_1, ξ_2.
  Schreibweise: $\xi = \xi_1 \vee \xi_2$

- Menge der beschränkten Funktionen auf $[a, b]$:

  $$\mathcal{B}[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ beschränkt}\}$$

  Für $M \subset [a, b]$ sei dabei

  $$\overline{f}(M) := \sup_{x \in M} f(x)\ ,\ \underline{f}(M) := \inf_{x \in M} f(x)$$

8.1.2 Definition: Untersumme

Sei $\zeta \in \Xi[a, b]$ und $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Dann heißt

$$\underline{S}(f, \zeta) := \sum_{I \in \zeta} \underline{f}(I) \cdot l(I)$$

Untersumme und

$$\overline{S}(f, \zeta) := \sum_{I \in \zeta} \overline{f}(I) \cdot l(I)$$

Obersumme von f bzgl. ζ. Dabei gilt stets

$$\underline{S}(f, \zeta) \leq \overline{S}(f, \zeta)$$

8.1.3 Lemma über Ober-und Untersummen

Sei $f \in \mathcal{B}[a,b]$ und $\zeta \prec \zeta'$. Dann gilt:

(i) $\underline{S}(f,\zeta') \geq \underline{S}(f,\zeta)$

(ii) $\overline{S}(f,\zeta') \leq \overline{S}(f,\zeta)$

(iii) $\overline{S}(f,\zeta') - \underline{S}(f,\zeta') \leq \overline{S}(f,\zeta) - \underline{S}(f,\zeta)$

(iv) $\forall\ \zeta_1, \zeta_2 : \overline{S}(f,\zeta_1) \geq \underline{S}(f,\zeta_2)$

8.1.4 Definition: Darbouxsches Integral

Sei $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Dann heißen die Größen

$$\underline{\int_a^b} f\ dx := \sup_{\zeta\in\Xi[a,b]} \underline{S}(f,\zeta) \quad \text{und} \quad \overline{\int_a^b} f\ dx := \inf_{\zeta\in\Xi[a,b]} \overline{S}(f,\zeta)$$

unteres und *oberes Darbouxsches Integral* von f.

Bemerke: Nach Lemma 8.1.3 gilt stets

$$\underline{\int_a^b} f\ dx \leq \overline{\int_a^b} f\ dx$$

Dabei gibt es sogar beschränkte Funktionen für die gilt

$$\underline{\int_a^b} f\ dx < \overline{\int_a^b} f\ dx$$

Beispiel: Für

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & : x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist

$$\underline{S}(f,\zeta) = 0\ ,\ \overline{S}(f,\zeta) = 1 \ \ \forall\ \zeta \in \Xi[0,1]$$

8.1.5 Definition: Riemannsches Integral

Eine Funktion $f \in \mathcal{B}[a,b]$ heißt *Riemann-integrierbar* ($\mathcal{R}$-integrierbar) :$\Leftrightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f\ dx = \overline{\int_a^b} f\ dx =: \int_a^b f\ dx$$

Dabei heißt $\displaystyle\int_a^b f\ dx$ *Riemannsches Integral* von f.
Schreibweise:

$$\int_a^b f\ dx\ ,\ \int_a^b f(x)\ dx$$

Bemerkung: Man definiert

$$\int_a^a f\ dx := 0 \quad , \quad \int_b^a f\ dx := \int_a^b f\ dx\ ,\ a < b$$

8.1.6 Riemannsches Integrabilitätskriterium

Eine Funktion $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ist $\mathcal{R}$-integrierbar $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \zeta \in \Xi[a,b] : \overline{S}(f,\zeta) - \underline{S}(f,\zeta) \leq \varepsilon$

8.1.7 Satz über monotone oder stetige Funktionen

1. Jede monotone Funktion $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ist $\mathcal{R}$-integrierbar.
2. Jede stetige Funktion auf $[a,b]$ ist $\mathcal{R}$-integrierbar.

8.1.8 Lemma: Änderung $\mathcal{R}$-integrierbarer Funktionen

Ändert man eine $\mathcal{R}$-integrierbare Funktion $f \in \mathcal{B}[a,b]$ an endlich vielen Stellen ab, so ist die neu entstehende Funktion $\tilde{f}$ ebenfalls $\mathcal{R}$-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f\ dx = \int_a^b \tilde{f}\ dx$$

8.1.9 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Sei $\mathcal{R}[a,b] := \{f \in \mathcal{B}[a,b] : f\ \mathcal{R} - \text{integrierbar}\}$. Dann gilt:

1. $\underline{f}([a,b]) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f\ dx \leq \overline{f}([a,b]) \cdot (b-a)$ für $f \in \mathcal{R}[a,b]$
2. Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}$ ist auch $c \cdot f \in \mathcal{R}[a,b]$ und es gilt
$$\int_a^b cf\ dx = c \cdot \int_a^b f\ dx$$
3. Für $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ ist auch $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ und es gilt
$$\int_a^b (f_1 - f_2)\ dx = \int_a^b f_1\ dx + \int_a^b f_2\ dx$$
Somit ist $\mathcal{R}[a,b]$ insbesondere ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.
4. Für $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ mit $f_1 \leq f_2$ gilt
$$\int_a^b f_1\ dx \leq \int_a^b f_2\ dx$$
5. Seien $a < b < c$ und $f : [a,c] \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a,c] \ \Leftrightarrow\ f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a,b] \ \wedge\ f|_{[b,c]} \in \mathcal{R}[b,c]$ und es gilt
$$\int_a^c f\ dx = \int_a^b f\ dx + \int_b^c f\ dx$$
6. Sei $f \in \mathcal{R}[a,b],\ m \leq f \leq M$ und $\varphi : [m,M] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: $h := \varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$
7. Für $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ist auch $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$
8. Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ist auch $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ und es gilt
$$\left| \int_a^b f\ dx \right| \leq \int_a^b |f|\ dx$$

8.2 Integration und Differentiation

8.2.1 Definition: Unbestimmtes Integral

Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $x_0 \in [a,b]$. Dann heißt

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}\ ,\ F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\ dt$$

unbestimmtes Integral.

8.2.2 Eigenschaften des unbestimmten Integrals

Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $c \in [a,b]$. Dann gilt für $F(x) := \displaystyle\int_c^c f(t)\ dt$:

(i) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig (sogar gleichmäßig stetig).

(ii) Ist f in x_0 stetig, so ist F differenzierbar in x_0 und es gilt: $F'(x_0) = f(x_0)$

Beachte: Ist f nicht stetig, so gilt (ii) im allgemeinen nicht!

8.2.3 Definition: Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f :\Leftrightarrow\ F' = f$

Bemerkung: Nach Satz 8.2.2 gilt: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $F(x) := \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt$ eine Stammfunktion von f.

8.2.4 Eindeutigkeit der Stammfunktion

Sind $F, G : I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f, so ist $(F - G) = \text{const}$

8.2.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\forall\ a, b \in I : \int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a) =: F(t)\ |_a^b$$

8.2.6 Integrationsregeln

Substitutionsregel: Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a,b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

Partielle Integration: Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)\ |_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

8.3 Mittelwertsätze der Integralrechnung, Taylorsche Satz

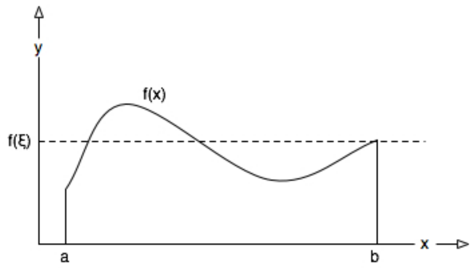
8.3.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien $f \in \mathcal{C}[a,b],\ g \in \mathcal{R}[a,b],\ g \geq 0$. Dann $\exists\ \xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx$$

Insbesondere gilt für $g = 1$:

$$\exists\ \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\ dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$



8.3.2 Taylorsche Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x_0,\ x \in I$:

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n(x)$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Bemerke:

- Die Voraussetzung an f ist etwas stärker als in der ursprünglichen Version aus Abschnitt 7.3.5.
- Für $1 \leq p \leq n$ ergibt sich

$$R_n(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\ dt = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-p+1}(x-t)^{p-1}\ dt$$

$$\overset{\substack{\text{MWS}\\ \text{für}\\ \text{geeignetes}\\ \xi\in[a,b]}}{=} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n-p+1} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{p-1}\ dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n-p+1} \left[-\frac{(x-t)^p}{p} \right]_{x_0}^{x}$$

$$= \frac{1}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n-p+1}(x-x_0)^p \overset{\substack{\text{für}\\ \text{geeignetes}\\ 0\leq\vartheta\leq 1}}{=} \frac{1}{n!p} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))(x - x_0 - \vartheta(x-x_0))^{n-p+1}(x-x_0)^p$$

$$= \frac{1}{n!p} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))(1-\vartheta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1}$$

  was genau dem Restglied von Schlömilch (vgl. 7.3.5) entspricht.

8.4 Uneigentliche Integrale, Γ-Funktion

8.4.1 Definition: Uneigentliche Integrale

- **Integrationsgrenze ist unendlich**

  Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R} : \forall\ R > a : f \in \mathcal{R}[a, R]$ und $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f\ dx$ existiert.

  Dann heißt das Integral $\int_a^\infty f\ dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^\infty f\ dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f\ dx$$

  Analog definiert man $\int_{-\infty}^a f\ dx$ für $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

- **Der Integrant ist an einer Integrationsgrenze nicht definiert**
  Sei $f : (a,b] : \forall 0 < \varepsilon < b-a : f \in \mathcal{R}[a+\varepsilon, b]$ und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f\ dx$ existiert.
  Dann heißt das Integral $\int_a^b f\ dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f\ dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f\ dx$$

- **Beide Integrationsgrenzen sind kritisch**
  Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \forall\ [\alpha, \beta] \subset (a,b) : f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ und sei $\alpha < c < \beta$ beliebig.
  Falls:

$$\int_a^c f\ dx = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^c f\ dx \ \wedge \ \int_c^b f\ dx = \lim_{\beta \to b} \int_c^\beta f\ dx$$

  konvergent sind, heißt das Integral $\int_a^b f\ dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f\ dx := \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx$$

8.4.2 Integralkriterium für Reihen

Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty]$ monoton fallend. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ ist konvergent $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)\ dx$ konvergent.

8.4.3 Definition: Γ-Funktion

Für $x > 0$ setzt man

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist wohldefiniert.

8.4.4 Eigenschaften der Γ-Funktion

Für $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ gelten folgende Eigenschaften:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
- Γ ist logarithmisch konvex, d.h

$$\Gamma(\vartheta x + (1-\vartheta) y) \leq [\Gamma(x)]^\vartheta \cdot [\Gamma(y)]^{1-\vartheta}$$

- Insbesondere gilt: $\Gamma(n+1) = n!$

Bemerkung: Erfüllt eine Funktion $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$ die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) vom Satz 4.2, dann ist $F = \Gamma$.

8.4.5 Höldersche Ungleichung

Sind $1 < p, q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$$\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)|\ dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\ dx \right)^{\frac{1}{q}}$$