Analysis I - Nachklausur
FSU Jena - WS 05/06
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 19, 2007

Aufgabe 1

a) *Siehe Vorlesung*

b) Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Zu Zeigen:

$$\left(\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n \ konvergent\right) \wedge \left(\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n \ divergent\right)$$

Fall 1: $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

$$b_n := \sup\{\sqrt[n]{|a_k|} : k \geq n\} \rightarrow \ \lim b_n =: \beta < 1 \ \Rightarrow \ \exists \ \gamma > 0 : \beta < \gamma < 1$$

$$\rightarrow \ \varepsilon := \frac{\gamma - \beta}{2} > 0 \Rightarrow \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : b_{n_0} \leq \beta + \varepsilon < \gamma$$

$$\Rightarrow \ \sqrt[n]{|a_n|} < \gamma \ \ \forall \ n > n_0 \ aus \ Definition \ von \ b_n$$

$$\Rightarrow \ |a_n| \leq \gamma^k \ \ \forall \ n > n_0$$

$$\Rightarrow \ \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma^n : konvergent$$

$$\Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n : konvergent$$

Fall 2: $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$

$$\Rightarrow \ \exists \ \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right) \subset \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) : \lim \sqrt[n]{|b_n|} =: \alpha > 1$$

$$\rightarrow \ \varepsilon := \frac{\alpha - 1}{2} > 0 \ \Rightarrow \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall \ n > n_0 : \ \sqrt[n]{|b_n|} \geq \alpha - \varepsilon > 1 \ \Rightarrow \ |b_n| > 1$$

$$\neg\,(b_n \rightarrow 0) \ \Rightarrow \ \neg\,(a_n \rightarrow 0) \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n : divergent \quad \square$$

Aufgabe 2

a) *Siehe Vorlesung*

b) $a_n := (-1)^n$

Aufgabe 3

Siehe Vorlesung

Aufgabe 4

Siehe Vorlesung

Aufgabe 5

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Aufgabe 6

Siehe Vorlesung

Aufgabe 7

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b), mit $g'(x) \neq 0$. Dann gilt:

a)

$$\exists\ \xi \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

b)

$$\exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c) Zweites ist eine Spezialfall vom ersten für $g(x) := x$:

$$\exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Aufgabe 8

Siehe Vorlesung

Aufgabe 9

Siehe Vorlesung

Aufgabe 10

$$Induktionsanfang:\ a_0 = a = aq^0 + d\frac{q^0 - 1}{q - 1}$$

$$Induktionsannahme:\ a_n = aq^n + d\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$Induktionsschritt:\ a_{n+1} = a_n q + d = q\left(aq^n + d\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) + d = aq^{n+1} + d\left(\frac{q^{n+1} - q}{q - 1} + 1\right) = aq^{n+1} + d\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \square$$

Aufgabe 11

$$f(x) := \frac{1}{x^x} = e^{-x\ln x},\ f:(0,1]\to\mathbb{R}\ \Rightarrow\ f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^x}$$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0,\ \left(x < \frac{1}{e}\right) \Rightarrow\ f'(x) > 0\ \Rightarrow\ streng,\ monoton\ wachsend$$

$$\left(x > \frac{1}{e}\right) \Rightarrow\ f'(x) < 0\ \Rightarrow\ streng,\ monoton\ fallend$$

$$\Rightarrow\ f'\left(\frac{1}{e}\right) = e^{1/e}\ Maximum\ \Rightarrow\ Supremum$$

$$f(x) = e^{-x\ln x} \geq e^0 = 1\ \Rightarrow\ 1: untere\ Schranke$$

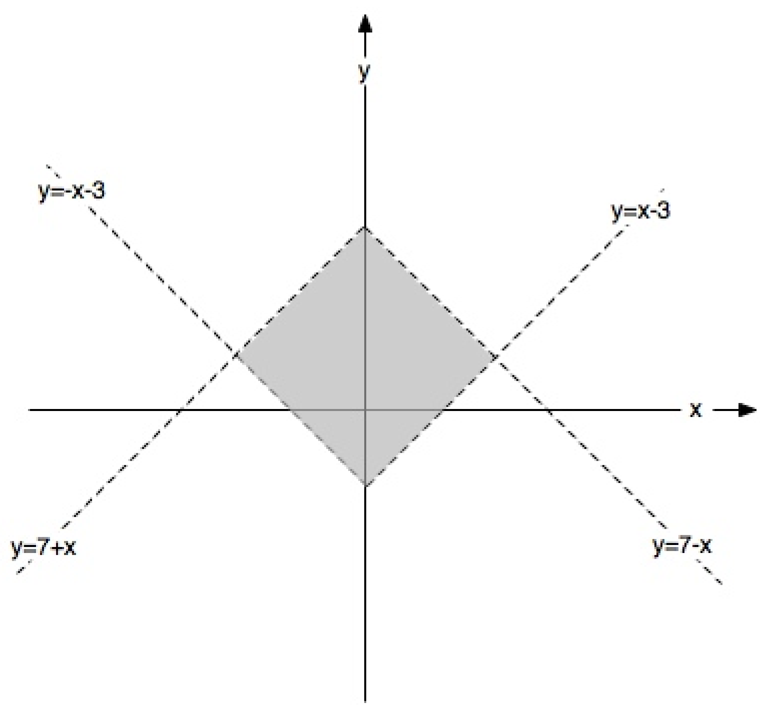
$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{-\lim \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{LH}{=} e^{\lim x} = e^0 = 1 = f(1)$$

$$\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ x \in (0,1] : f(x) < 1 + \varepsilon\ \Rightarrow\ 1 : Infimum\ \&\ Minimum$$

Aufgabe 12

$$|x| + |y-2| < 5\ \Rightarrow\ | < 5 - |y-2| \leq 5\ \Rightarrow\ x \in (-5,5)$$

$$-5 + |x| < y - 2 < 5 - |x|\ \Rightarrow\ (y > |x| - 3) \wedge (y < 7 - |x|)$$



Aufgabe 13

$$a_n := \frac{(-n)^n}{n!}(x-1)^n$$

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\ |x-1|\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e|x-1| \overset{!}{<} 1$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{e} < x-1 < \frac{1}{e}\ \Rightarrow\ x \in \left(1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right)$$

Aufgabe 14

$$\exists\ M := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

$$Sei\ \varepsilon > 0\ beliebig : \delta := \frac{\varepsilon}{M} > 0 \to \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_0 : n > \frac{1}{\delta}$$

$$\Rightarrow\ |b_n - 0| = \left|\frac{a_n}{n}\right| < |a_n\delta| = \left|\frac{a_n}{M}\varepsilon\right| < \varepsilon\ \Rightarrow\ b_n \to 0 \quad \square$$

Aufgabe 15

$$\arctan(),\ \sin()\ in\ \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\ stetig \Rightarrow\ auch\ f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right)\ stetig$$

$$F\ddot{u}r\ x = 0 :$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{t\to\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = f(0)$$

$$Analog :\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \neq 0 = f(0)\ \Rightarrow\ Nicht\ stetig\ in\ x = 0$$

Aufgabe 16

$$\int \frac{xdx}{x^2+6x+34} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-6}{x^2+6x+34}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+34\right| - \int \frac{3dx}{x^2+6x+34} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+34\right| - \int \frac{3dx}{(x+3)^2+25}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+34\right| - \frac{3}{25}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{5}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+34\right| - \frac{3}{5}\arctan\left(\frac{x+3}{5}\right) + C,\ C : const$$

Aufgabe 17

$$t := \tan x \;\Rightarrow\; dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1+\tan^2 x)dx = (1+t^2)dx$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x} = 1 + \frac{1}{t^2},\;\; \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^2} = \int t^2 dt + \int 2dt + \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} + C,\;\; C : const$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} + 2\tan x - \cot x + C$$

Aufgabe 18

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\cos^2 2x - 2\cos 2x\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1+\cos 4x}{2} - 2\cos 2x\right) = \frac{1}{8}\left(3 - 4\cos 2x + \cos 4x\right)$$

$$\Rightarrow\; F(x,C) := \int \sin^4 x = \frac{1}{8}\int \left(3 - 4\cos 2x + \cos 4x\right) = \frac{1}{8}\left(3x - 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$$

$$\Rightarrow\; \int_0^{\pi/2} \sin^4 x = F\left(\frac{\pi}{2}, C\right) - F(0,C) = \frac{3\pi}{16}$$