

Analysis I - Nachklausur

FSU Jena

A. Weber

WS 05/06 - 4 April 2006

1

- a) Formulieren Sie das Wurzelkriterium für die Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen.
- b) Beweisen Sie diesen Satz (für beide Fälle).

2

- a) Nennen Sie die Definition für die Konvergenz einer Folge (a_n) gegen den Grenzwert a mit der ε -Sprache.
- b) Geben Sie ein Beispiel für eine Beschränkte aber nicht konvergente Folge an.

3 Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß für Zahlenfolgen?

4 Formulieren Sie das Konvergenzkriterium von Leibniz (für Reihen).

5 Geben Sie die Potenzreihendarstellung für $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ an.

6

- a) Nennen Sie die Umgebungsdefinition ($\varepsilon - \delta$ -Definition) für die Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle ξ .
- b) Wie lautet das Folgenkriterium für die Stetigkeit von f an der Stelle ξ ?

7

- a) Formulieren Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Quotientenmittelwertsatz) der Differentialrechnung.
- b) Nennen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
- c) Begründen Sie, warum der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein Spezialfall des verallgemeinerten Mittelwertsatzes ist.

8 Wie lautet die Definition für die strenge Konvexität bzw. strenge Konkavität einer Funktion f auf einem Intervall I ?

9 Formulieren Sie den 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

10 Zu reellen Zahlen a, d und $q \neq 1$ sei die Folge (a_n) definiert durch die Anfangsbedingung $a_0 = a$ und die Rekursionsformel $a_{n+1} = a_n q + d$. Beweisen Sie die explizite Formel

$$a_n = aq^n + d \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

11 Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (falls sie existieren) der Menge

$$M = \left\{ \frac{1}{x^x} : 0 < x \leq 1 \right\}$$

12 Skizzieren Sie die Menge aller Punkte (x, y) in der xy -Ebene, die der Ungleichung

$$|x| + |y - 2| < 5$$

genügen.

13 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{n!} (x-1)^n$$

14 Es sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Beweisen Sie nur mit der Definition des Grenzwertes, dass die Folge der Zahlen $b_n = \frac{a_n}{n}$ eine Nullfolge ist.

15 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right) & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Für welche x ist diese Funktion stetig (Begründung) ?

16 Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 6x + 34}$$

17 Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$$

Hinweis: Substituieren Sie $\tan x = t$.

18 Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$$