Analysis I - Klausur
FSU Jena - WS 98/99
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 18, 2007

Aufgabe 1

$$Induktionsanfang: \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^3(1+1)^3}{4}$$

$$Induktionsannahme: \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$Induktionsschritt: \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \Box$$

Aufgabe 2

$$Fall\ 1: x > 1 :\Rightarrow\ 1 = \frac{x-1}{x-1} < \frac{1}{x+1}\ \Rightarrow\ x+1 < 1\ \Rightarrow\ x \in \emptyset$$

$$Fall\ 2: -1 < x < 1 :\Rightarrow\ 1 = \frac{x-1}{x-1} > \frac{1}{x+1}\ \Rightarrow\ x+1 > 1\ \Rightarrow\ x \in (0,1)$$

$$Fall\ 3: x < -1 :\Rightarrow\ 1 = \frac{x-1}{x-1} > \frac{1}{x+1}\ \Rightarrow\ x+1 < 1\ \Rightarrow\ x \in (-\infty,-1)$$

$$Zusammen:\ x \in (0,1) \cup (-\infty,-1)$$

Aufgabe 3

a)

$$\lim a_n = \lim \frac{3^n \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} = \frac{2\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3$$

b)

$$\lim a_n = \lim \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^4} = \lim \frac{n^4+n^2+2n^3}{4n^4} = \lim \frac{1}{4} + \lim \frac{1}{4n^2} + \lim \frac{1}{2n} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 4

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)} = \lim \frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\cos(x)}{x}} = \frac{1+\lim\frac{\sin(x)}{x}}{1+\lim\frac{\cos(x)}{x}} = 1$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\lim\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = 1$$

Aufgabe 5

a)

$$a_n := \frac{1}{3^n - 2^n} \;\rightarrow\; \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}} = \lim \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1 \;\Rightarrow\; Konvergent$$

b)

$$a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{10}},\; \lim a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; Nicht\ Konvergent$$

c)

$$a_n := \frac{1}{n^2-n} < \frac{2}{n^2} \quad denn\ f\ddot{u}r\ n>2:\; n^2 > 2n \;\Rightarrow\; n^2 < 2n(n-1)$$

$$\Rightarrow\; 0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;\rightarrow\; Konvergent\ nach\ Verdichtungskriterium$$

$$\Rightarrow\; Konvergent$$

Aufgabe 6

$$f'(x) = \left(e^{\sin x \ln(\cos x)}\right)' = (\cos x)^{\sin x} \cdot \left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

Aufgabe 7

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \overset{!}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Rightarrow \; 0 = 0\cdot 1 = \lim \sin x \left|\sin\frac{1}{x}\right| \cdot \lim \frac{\sin x}{x} = |a| - a \;\Rightarrow a \geq 0$$

$$f'(0) = 0$$

Aufgabe 8

$$f(x) := \frac{\log x}{x} = \frac{\ln x}{x \ln 10},\; f : [1,10] \to \mathbb{R}$$

$$f(1) = 0,\; f(10) = \frac{1}{10},\; f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2 \ln 10}$$

$$\Rightarrow\; f'(x) > 0 \;\; : x \in [1,e),\; f'(x) < 0 \;\; : x \in (e,10],\; f'(e) = 0,\; f''(e) < 0$$

$$\Rightarrow\; f(e) = \frac{1}{e \ln 10} =: a > 0 \;\; globales,\; isoliertes, maximum$$

$$\Rightarrow\; a : Obere\ Schranke$$

$$Ausserdem:\; \forall\, a > \varepsilon > 0 : \exists\, \xi \in [1,e] : f(\xi) = a - \frac{\varepsilon}{2} > a - \varepsilon \; da\; f\; stetig$$

$$\Rightarrow\; a : supremum$$

$$f : [1,e) \to \mathbb{R}\; streng\ monoton\ steigent \;\wedge\; f : (e,10] \to \mathbb{R}\; streng\ monoton\ fallend$$

$$\Rightarrow\; min\,\{f(x) \mid 1 \leq x \leq 10\} = min \left\{0, \frac{1}{10}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow\; 0\; infimum$$

Aufgabe 9

$$g(x) := \arctan x - \frac{x}{1+x^2},\; g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

$$g(0) = 0,\; g'(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \;\Rightarrow\; g(x) > 0 \;\forall\, x > 0 \;(streng\ monoton\ wachsend)$$

$$\Rightarrow\; \arctan x > \frac{x}{1+x^2} \;\forall\, x > 0 \quad \square$$