

Klausur zur Analysis I WS 98/99

Prof. Dr. B. Carl
-Abschrift-
bestanden mit 17 Punkten

19. Dezember 2003

1. (3) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. (3) Bestimmen Sie alle Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, die der Ungleichung

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x^2-1}$$

genügen.

3. (4) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

- $a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
- $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$.

4. (4) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

5. (6) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der unendlichen Reihen

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{10}}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$.

6. (2) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der Funktion

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

7. (3) Für welche reellen Zahlen a ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x |\sin \frac{1}{x}| & \text{für } x > 0 \\ (|a| - a)x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

Berechnen Sie $f'(0)$ für solche a .

8. (4) Berechnen Sie das Supremum und Infimum der Menge

$$\left\{ \frac{\log x}{x} : 1 \leq x \leq 10 \right\}.$$

9. (2) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\arctan x > \frac{x}{1+x^2} \text{ für } x > 0.$$

10. (3) Es sei E eine Menge, ausgestattet mit der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

und F ein beliebiger (anderer) metrischer Raum (Metrik ρ). Zeigen Sie, dass jede Abbildung von E nach F stetig ist.