Analysis I - Klausur
FSU Jena - WS 06/07
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 21, 2007

I

a) Siehe Vorlesung!

b)

$$Induktionsanfang: \ (1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$$

$$Induktionsannahme: \ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

$$Induktionsschritt: \ (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \quad \square$$

II

Aufgabe 1

a) Siehe Vorlesung!

b) Siehe Vorlesung!

c) Sei (a_n) eine Konvergente Zahlenfolge mit a, b als Grenzwerte. Annahme: $a \neq b$. Dann folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \ n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall \ n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \ \varepsilon := \frac{|a-b|}{4}, \ n_2 := \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow \forall \ n \in \mathbb{N} : n > n_2 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \ \wedge \ |a_n - b| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \ |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} \ \Rightarrow \ |a-b| \leq 0 \ Widerspruch! \ \Rightarrow \ a = b \quad \square$$

d) Siehe Vorlesung!

Aufgabe 2

a) Siehe Vorlesung!

b)

$$Fall\ 1: |q| \geq 1 \Rightarrow\ |nq^n|\ bestimt\ divergent\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} nq^n\ nicht\ konvergent!$$

$$Fall\ 2: |q| < 1 \Rightarrow\ \limsup \left| \frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} \right| = \lim \frac{n+1}{n}|q| = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim |q| = |q| < 1 \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} nq^n\ konvergent!$$

III

a) Siehe Vorlesung!

b) Siehe Vorlesung!

c)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \frac{\sin x}{x} \overset{L'Hopital}{=} 1 \neq 0 = f(0) \Rightarrow\ nicht\ stetig\ in\ x_0 = 0$$

IV

Aufgabe 1

a) Siehe Vorlesung!

b)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} sgn(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} sgn(x) = -1$$

$$\Rightarrow\ \neg\exists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\ \Rightarrow\ nicht\ differenzierbar!$$

Aufgabe 2

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion.

$$Sei\ h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$\Rightarrow\ h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h(a) = h(b) = f(a)\ \Rightarrow\ \exists\ \xi \in (a, b) : h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\ \Rightarrow\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \square$$

b)

$$Sei\ x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\ beliebig.\ Dann:$$

$$\exists\ \xi \in (0, x_0) : 1 > \cos(\xi) = (\sin(\xi))' = \frac{\sin(x_0) - \sin(0)}{x_0 - 0} = \frac{\sin(x_0)}{x_0} > 0$$

$$\Rightarrow\ \sin(x_0) < x_0 \quad \square$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{LH}{=} \lim \frac{e^x - 1}{2x} \overset{LH}{=} \lim \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim e^{\frac{\ln\left[(a^x+b^x)/2\right]}{x}} \overset{LH}{=} \lim e^{\frac{2}{a^x+b^x} \cdot \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2}} = e^{\lim \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}}$$

$$= e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = e^{\ln\left[\sqrt{ab}\right]} = \sqrt{ab}$$

d)

$$f'(x) = a^x \ln a,\ f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0\ \Rightarrow\ Konvex\ auf\ \mathbb{R}\ \forall\ a \in (0,1) \cup (1, \infty)$$

$$Streng\ monoton\ wachsend\ für\ a > 1\ \ (f'(x) > 0)$$

$$Streng\ monoton\ fallend\ für\ a < 1\ \ (f'(x) < 0)$$

Aufgabe 3

$$f^{(n)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^n\ \Rightarrow\ f^{(n)}(0) = (\ln a)^n$$

$$T_n(f;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) \cdot (x-0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln a)^k\, x^k}{k!}$$

$$T_\infty(f;0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^k\, x^k}{k!}$$